

教育セ	G03 - 03
	平 15.216 集

# 変形可能な図形教材の作成とその活用

## 図形に対する直観力や洞察力の育成を目指して

特別研修員 笠原 竜二（太田市立北中学校）

### 研究の概要

本研究では、中学2年の図形の学習において、生徒自らが具体的に図形を操作する活動を通して、その性質や論証の手掛かりを発見することができるよう、図形を容易に変形・移動できる教材を作成した。教材は大日本図書の「平面の図形」を利用した Web 形式で作成し、生徒が操作しやすいように工夫した。また、この学習を通して図形に対する直観力や洞察力の育成を目指すとともに、授業実践を通して有効性を検証した。

【キーワード：数学 - 中 図形 コンピュータ 教材】

### 主題設定の理由

数学の学習過程において、新たな事実に気づいたり規則性を見出したりすることは、喜びであり数学の面白さでもある。そして、学習を押し進めていくための力ともなる。しかし、実際には、規則性がなかなか発見できずに諦めたり、考えること自体をおっくうに感じたりしてしまう生徒も多い。そんな中で、図形に対する直観力や洞察力は、図形の性質や特徴を見出すための手助けとなり、また学習に取り組むためのきっかけにもなる。そして、直観力や洞察力は論理的な思考を導くための手掛かりともなるために、数学的な考え方を育成する上でも、直観力や洞察力を伸ばすことは重要な課題である。

本研究では、図形に対する直観力を、図を見てその性質や特徴を予測する力、また洞察力を、論証のための見通しやその手立てに気づく力と捉える。つまり、図形から等しい辺や角を見出すことも直観力であり、証明の根拠となる定理に気づくことも洞察力であると考え。そして、その能力を高めるには、操作や実験・観察などの具体的な体験を通して、性質や特徴を見出していきような帰納的に推論する経験を繰り返し行うことが必要である。そのためには、いくつかの図形を比較したり、条件にあった図形を何個も作図することが必要となる。しかし、一定の条件のもとで多くの図形を作図したり、図形の移動や変形等の操作を繰り返し行うことは、生徒にとって容易なことではなく、多くの時間を費やすことにもなる。また、図やモデルなどの教具では、生徒が自由に移動や変形をすることは難しく、その過程を連続的に観察することができない。

そこで、コンピュータのグラフィック機能を活用した、変形可能な図形教材を作成した。このことによって、簡単な操作で自由に図形の移動や変形を繰り返し行うことが可能になる。そして、この教材を活用することにより、変形や移動の過程を動的に観察することもでき、図形の性質や特徴を視覚的にも捉え易く、図形に対する直観力や洞察力の育成を図ることができる。また、必要に応じて、条件設定を変えながら図形を連続的に表示することにより、性質発見の手助けともなる。さらに、コンピュータという生徒の興味・関心を誘う教具を、生徒が自ら操作することにより、意欲的に学習に取り組むことも期待できる。

このような学習を積み重ねることにより、生徒の直観力や洞察力を伸ばし、さらに性質や特徴を発見するという数学本来の面白さも知ることができると考えて、本主題を設定した。

## 研究のねらい

図形に対する直観力や洞察力を伸ばすために、コンピュータを利用した生徒自らが操作できる、変形可能な図形教材の開発及び活用法の工夫を行い、授業実践を通してその教材の有効性を検証する。

## 研究の見通し

コンピュータを利用した変形可能な図形教材を開発し、平面図形の性質や特徴を理解する場面において、次のような見通しを持って活用すれば、生徒の図形に対する直観力や洞察力を伸ばすことができるであろう。

- 1 変形可能な図形教材を生徒自らが操作することにより、図形の性質に触れることができるとともに、試行錯誤する中で図形の性質や特徴を発見することの楽しさや変形などの工夫することの大切さに気づくであろう。
- 2 図形の性質や特徴を見出す場面において、一定の条件のもとで図形を変形したり移動したりすることによって、その図形の性質や特徴を発見することができるとともに、辺の長さや角の大きさを表示し、変形・移動することによってその性質や特徴を具体的に確認することができるであろう。
- 3 論証の場面において、生徒自らが図形を自由に変形したり、補助線を加えたりする操作を行うことによって、思考の助けとなるであろう。
- 4 図形の学習において、変形可能な図形教材を活用した授業を、継続的計画的に行うことにより、生徒の図形に対する直観力や洞察力の伸長を図ることができるであろう。

## 研究の内容

### 1 教材の概要

#### (1) 基本的な考え方

中学校2年数学における図形領域において、平面図形の性質や特徴についての理解を深めるとともに、その過程を通して直観力や洞察力を育成することを目的として教材を作成する。

そのために、生徒自らが操作を行えること、個々の生徒の能力に対応できることを基本とし、以下のような工夫を行う。

生徒が容易に操作できるよう、Java applet で図形を作成し、Web 形式のページ構成とすることによって、マウスの操作だけで図形の移動や角度・長さの表示等の操作ができるものとする。また、Java applet の作成については、大日本図書の「平面の図形」を利用する。

直観力や洞察力を養うために、個々の教材において「性質の発見」「数値化による確認」「証明による一般化」の段階を追って学習を進められるものとする。

「証明による一般化」の段階においては、一人一人の生徒が見通しを持って学習に取り組めるように、ヒントボタンを設け、個々の生徒に対応できるようにする。また、穴うめ形式の証明のページについては、生徒が安易に利用しないよう、リンクにパスワードを設定し、必要に応じて活用できるようにする。

見易さに配慮し、各ページともできるだけ一画面内に収まるようにする。

図形内のポイントとなる辺や角については色を変えるなど、視覚的に捉え易いものとする。

「平行線と角」「平行四辺形」「円と角」のそれぞれの単元において教材を作成し、継続的な学習が行えるようにする。

## (2) ソフトの構成

本ソフトでは、TOP ページから各単元のページに進み、そこから各教材へリンクする形式とした。基本的なソフトの構成は図 1 のとおりであるが、一部の角度や辺の長さを表示させるページにおいては、同一のページを 2 つ作成し、一方は数値の表示があり他方は数値の表示がないものとし、互いにリンクさせることによって、角度や辺の長さをボタン一つの操作で表示・消去できるようにしている。

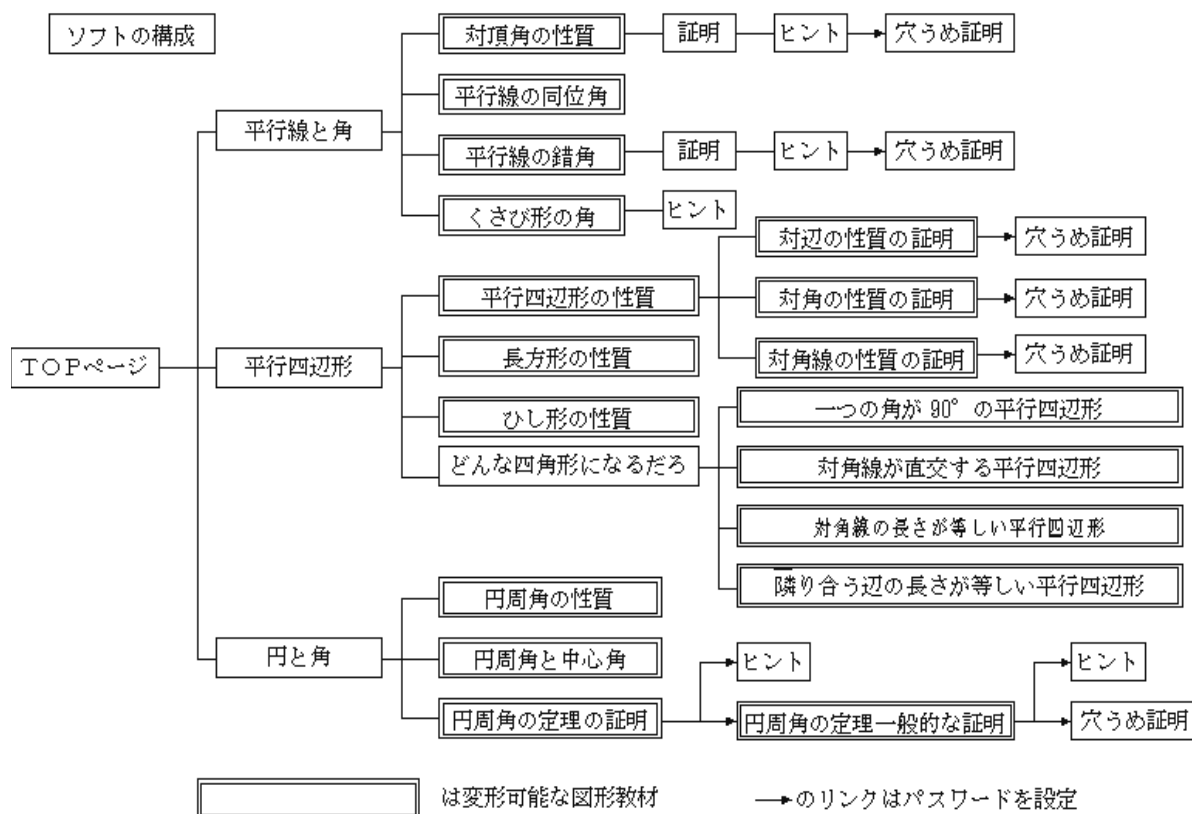


図 1 ソフトの構成図

## 2 ソフトの内容

### (1) TOP ページ「図形ワンダーランド」

TOP ページ(図 2)では、このソフトが図形を変形や移動しながらその性質や特徴を捉えていくものであることを説明し、冒険に出発するような感覚ではじめられるように工夫した。また、下の 3 つの扉に「平行線と角」「平行四辺形」「円と角」のそれぞれのページへリンクを設定した。

### (2) 各単元のページ

TOP ページの次に 3 つの単元のページをそれぞれ設け、授業の内容に応じて各図形教材を選択し易い形とした。図 3 は平行四辺形の単元のもので、下の 4 つのボタンで「平行四辺形の性質」、「長方形の性質」、「ひし形の



図 2 TOP ページ

性質」「どんな四角形になるだろう」のそれぞれの教材へとリンクしている。他の単元についても同様な構成である。

(3) 各教材の基本構造

各教材とも基本的には、表題、図形部分、課題の3つの部分からなっている。

図形部分には、コマンドメニューが上部にあり、生徒が必要な操作をマウスで選択し、実行できるようにした。また、図形の可動部分にマウスを重ねると点や線が赤く変色する。生徒はその部分をドラックさせることにより移動・変形ができる。また、課題部分の問題に答える形で、図形についての学習を進めて行く。

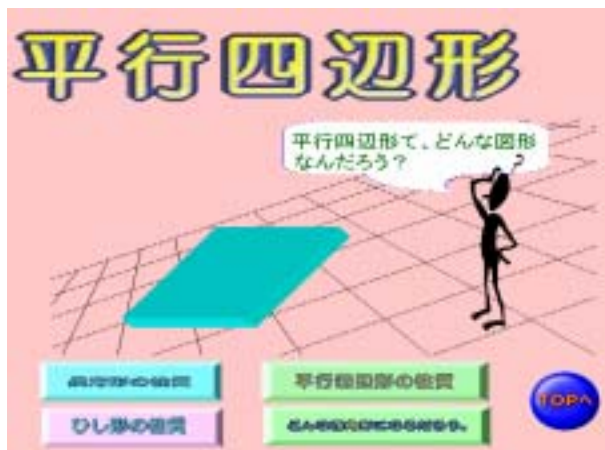


図3 平行四辺形の単元のページ

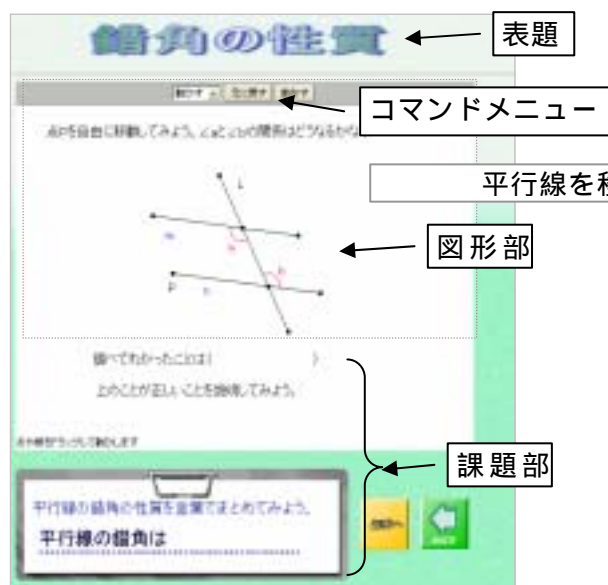


図4 錯角の性質のページ

図4は「平行線の錯角」についての教材の例である。点Pをマウスでドラッグし移動することによって、図5のように平行線を自由に動かすことができる。このように図を変形することによって、錯角が等しくなることが予想できる。

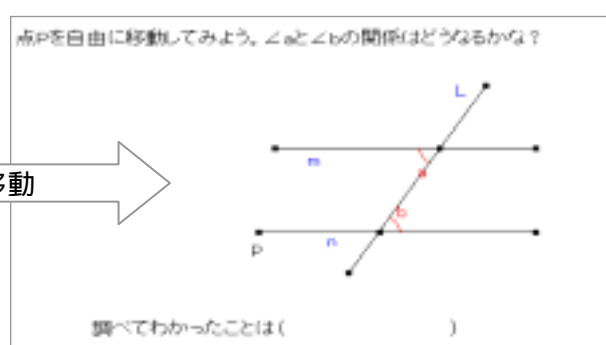


図5 平行線を移動した図



図6 証明のページ

次に予想が正しいことを確認するために、角度を表示するコマンドを利用し、図上に角度を数値で表示し、平行線の錯角が等しいことを数値から確認する。

さらに一般的に「平行線の錯角が等しい」ことを「証明のページ」(図6)で証明する。このとき、証明の手掛かりがつかめない生徒は、下部のヒントボタンから、ヒントのページへと進むことができるようにした。また、証明を苦手とする生徒に対しては、穴埋め形式により流れがつかみやすいように、要点となる部分を空欄とした証明のページを作成した。他の教材についてもおおむね同様な構成であり、特に「平行四辺形の性質」については、3つの性質につい

それぞれ証明ができるように、個別にページを設けた。

(4) 具体的な教材の例

「くさび形の角の性質」については3つの内角をADCのところを集める方法を考えるという視点から、「コマンドメニュー」の「平行線」や「線分」等を利用し図に補助線を加え、平行線と角の性質や三角形の外角の性質を利用し、図を変形しても等しくなる角などに注目しながら思考を深める。特に、難しく感じる生徒に対しては、角度を表示することにより、思考の助けとすることもできる(図7)。また、思考の過程を残すために、学習プリントの図に、見つけた補助線や等しい角を記入させ証明を行う。

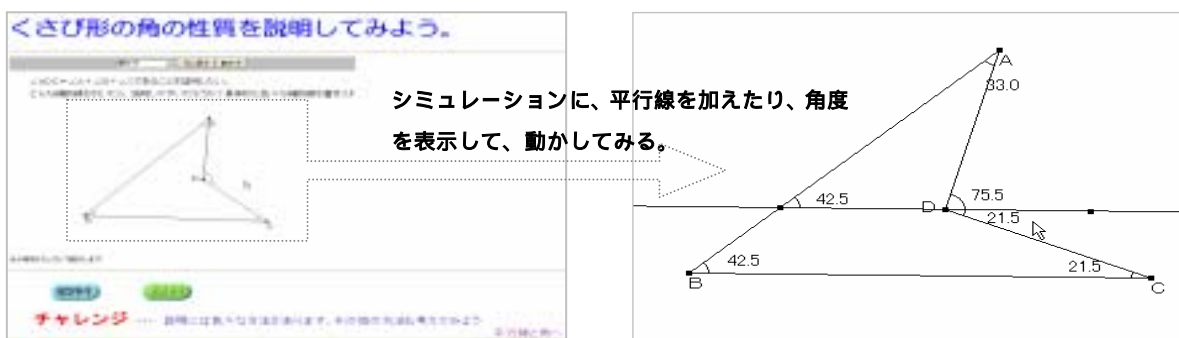


図7 くさび形の角の性質

「長方形の性質」においては、図8のように、長方形の大きさや形を変えることができる教材を作成し、生徒が自由に操作しながら課題を解決していくようにする。問題1は、操作を通して図形を変形しても成り立つ性質を発見する。問題2は、その性質を論証によって確かめる。問題3は、性質を言葉でまとめ知識としての定着を図る。「平行四辺形の性質」や「ひし形の性質」も同様な教材である。

「どんな四角形になるだろう?」では、生徒自らが、平行四辺形を一定の条件のもとで変形し、決まった図形になることに気づくことにより、特別な平行四辺形である長方形やひし形についての理解を深めることをねらいとする。具体的には、「隣り合った辺の長さが等しい平行四辺形」(図9)を実際に作図して、それがどんな四角形であるか推測する。またその理由を考えることにより、平行四辺形がひし形になるための条件を理解する。他の「ひとつの角が90°」や「対角線が直交する」や「対角線の長さが等しい」の教材についても同様に取り扱い、生徒は推論の経験を重ねることができる。

「円周角の性質」(図10)では、弧AB上

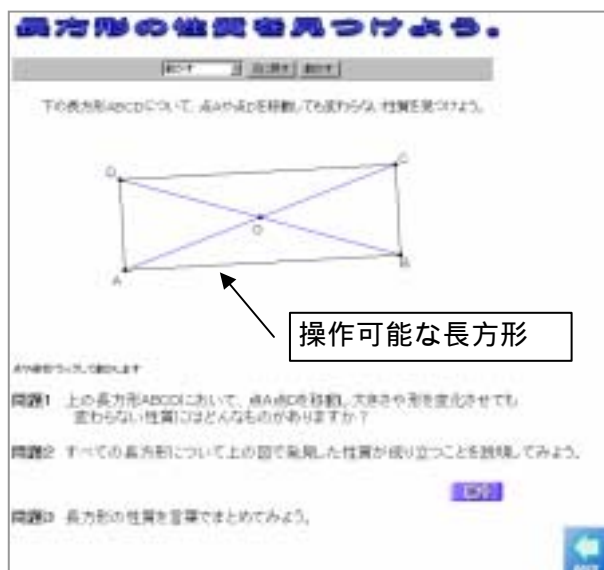


図8 長方形の性質

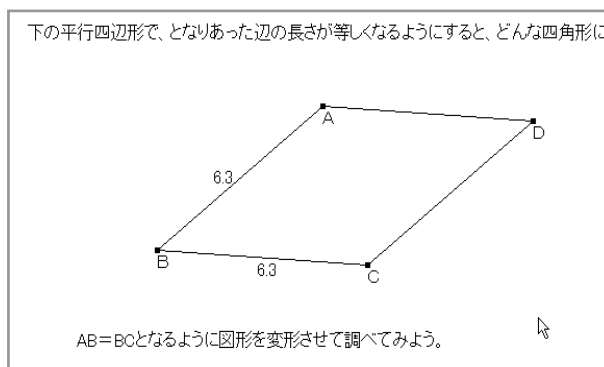


図9 隣りあった辺の長さが等しい平行四辺形

で点Pを自由に移動させ、そのときにできる円周角  $\angle APB$  の大きさに注目し、特定の弧に対する円周角の大きさが一定であることに気づく。また、角度を表示することによってそのことを確認する。

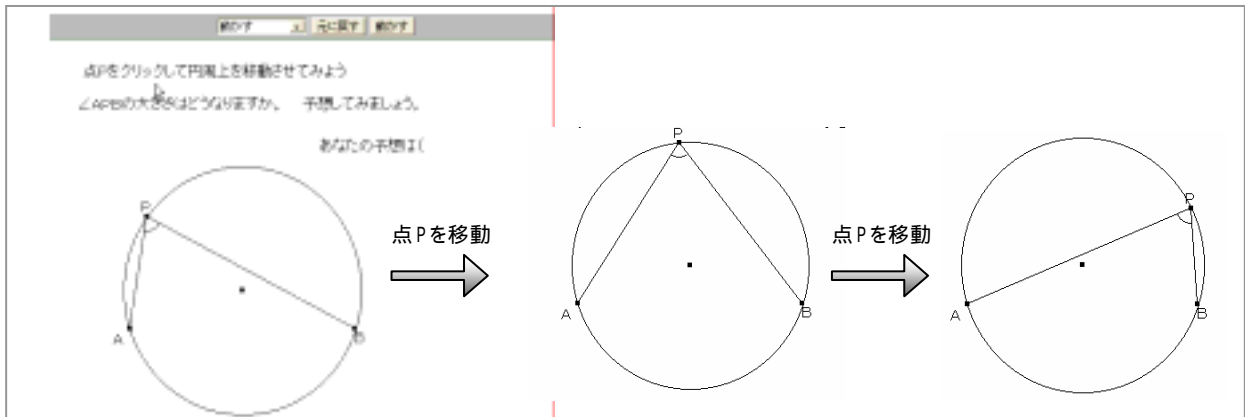


図 10 円周角の性質

図 11 の「円周角の証明」では、外見上は「円周角と中心角」の場合と同様であるが、事前に証明に用いる直線  $PO$  を非表示の状態で作図しておく。

証明の第一段階では、証明しやすい位置へ点  $P$  を移動し（図 12）証明を考える。

第二段階では、一般的な状態（図 13）での証明を考える。一つの弦が直径になる場合（図 12）を参考に、補助線  $PQ$  を引くことに気づき、証明を行う。

第三段階では、発展として図 14 の状態での証明方法を考える。3つの証明を行うことにより、全ての場合において、1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角は円周角の2倍であることが説明できる。



図 11 円周角の証明

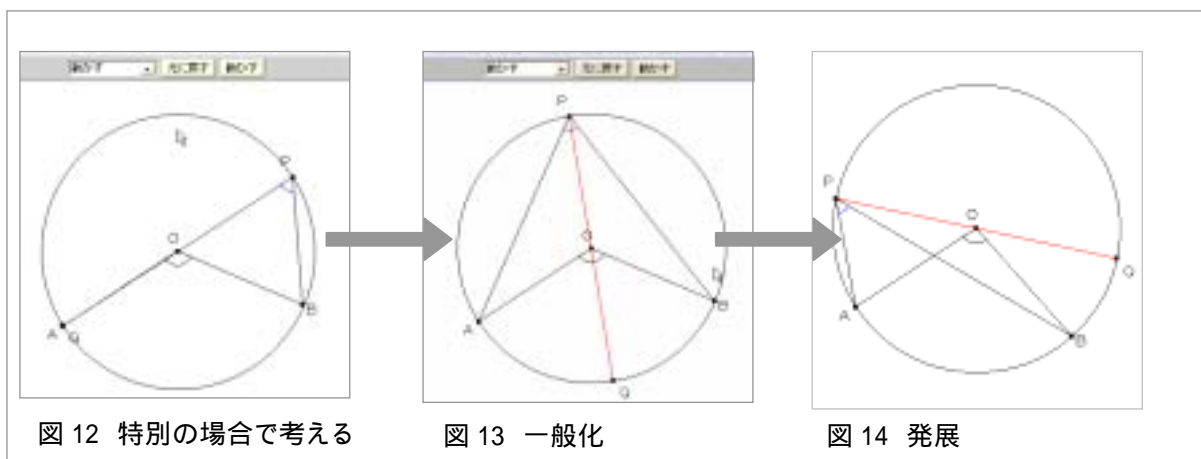


図 12 特別の場合で考える

図 13 一般化

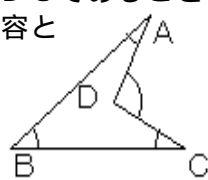
図 14 発展

### 3 実践の結果と考察

#### (1) 実践の内容

本研究では、本教材を利用した授業を継続的に進められるように、次のような学習計画を立て実践を行ってきた。

#### 学習計画

単元	ねらい	学習内容	「図形教材」名
平行線と角	平行線と角との関係を理解する。	対頂角が等しいことに気づき、そのことを説明する。	「対頂角の性質」
		平行線における同位角の性質を理解する。	「平行線の同位角」
	平行線における錯角の性質を理解し、同位角や対頂角の性質を用いて説明する。	「平行線の錯角」	
平行四辺形	三角形の外角の性質や平行線と角の性質が利用できる。	くさび形の図形において、 $A + B + C = ADC$ であることを、補助線を引き既習内容と結びつけ説明する。 	「くさび形の角」
	平行四辺形の3つの性質を理解する。	平行四辺形の対辺、対角、対角線の3つの性質に気づき、それぞれを証明によって明らかにする。	「平行四辺形の性質」
	長方形・ひし形の性質について理解する。	長方形やひし形の対角線の性質に気づき、定義をもとに証明する。 平行四辺形に一定の条件を与えると、どのような図形になるかを推測し、その理由を考える。	「長方形の性質」 「ひし形の性質」 「どんな四角形になるだろう」
円と角	円周角の性質を理解する。	円周角の性質や円周角と中心角の関係に気づき、定理としてまとめるとともに、その証明を行う。	「円周角の性質」 「円周角と中心角」 「円周角の定理の証明」

授業は、一人一人の生徒がコンピュータを使用できるようにコンピュータ室で行った。教材のソフトは、各コンピュータのホルダーに保存しておき、デスクトップに貼り付けたショートカットのアイコンにより起動するようにし、必要な場面で簡単に使えるようにした。

実践授業として、「平行四辺形の性質」(2時間)、「長方形とひし形の性質」(2時間)「円周角の性質」(1時間)の授業を行った。各授業とも単にコンピュータを操作しただけに終わらないように、その都度ワークシートを用意し、自らが発見したことや、思考の手立てとしての補助線や証明の過程などを残し、自らの学習を振りかえることができるようにした。以下は「長方形とひし形



図 15 授業の様子

以下は「長方形とひし形

の性質」について学習した授業の様子である。また、授業中の観察、授業記録、アンケート、ワークシートの内容により検証を行った。

「長方形とひし形の性質」の実践例

学習過程	活動内容	支援の留意点	学習形態
導入	<ul style="list-style-type: none"> <li>長方形やひし形の定義の確認</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>長方形やひし形の定義を発表させ、長方形やひし形がどのような四角形であるかを、確認する。</li> <li>長方形やひし形が、平行四辺形であることも復習する。</li> </ul>	プリントを活用
課題の把握	<ul style="list-style-type: none"> <li>コンピュータ教材「長方形の性質」を使い、長方形の性質を見つける。</li> <li>予想した性質を発表し、確認する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>長方形 ABCD の点 A、点 D を移動させながら図形を変形しても等しくなると思われるものを予想させる。</li> <li>予想したものは、すべてプリントに記入させ、その後発表を通して、全体で確認を行う。</li> <li>既習事項の性質であっても、成り立つと思われる性質は発表させる。</li> <li>発表されたものの中で、定義や平行四辺形の性質から、成り立つことが説明できるものは、その都度、生徒に説明をさせる。</li> <li>見つけた性質の中で、既習事項ではない「長方形の対角線は等しい」という性質に注目させ、この性質の証明が必要であることに気づかせる。</li> </ul>	コンピュータを活用
課題の追求	<ul style="list-style-type: none"> <li>長方形特有の性質『対角線の長さが等しい』を確認し、証明する。 数値化による確認 コマンドの「長さ」を使い、対角線の長さが等しくなることを確認する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>辺の長さを数値化し、図形の変形を行うことにより、性質が成り立つことを確認させる。</li> </ul>	プリントを活用
	<ul style="list-style-type: none"> <li>証明により、すべての長方形で成り立つことを示す。</li> <li>「長方形の対角線の長さは等しい」を証明する。</li> <li>証明を発表し、全体で確認する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>コンピュータから離れ、プリントを利用して証明させる。</li> <li>プリントの図を利用し、仮定と結論を確認する。</li> <li>図で <math>AC = BD</math> を証明するためには、どんな図形に注目すればよいかを考えさせ、三角形の合同の証明に気づかせる。</li> <li>長方形は平行四辺形でもあるので、その性質が成り立つことも確認する。</li> <li>証明の結果から、すべての長方形で成り立つ性質であることを理解させる。</li> </ul>	
発展	<ul style="list-style-type: none"> <li>コンピュータ教材「ひし形の性質」を使い、ひし形の性質を見つける。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ひし形特有の性質を見つけるよう指示する。</li> <li>コマンドメニューの角度を用いて、角の性質についても確認させる。</li> <li>多くの生徒が、「ひし形の対角線は直交する。」という性質を見つけたところで発表し、全体で確認する。</li> </ul>	コンピュータを活用



学習過程	活動内容	支援の留意点	学習形態
発展	<ul style="list-style-type: none"> <li>「ひし形の対角線は直交する。」ことの証明を、プリント上で行う。</li> <li>証明を発表し、全体で確認する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>証明の手立てが分からない生徒に対しては、隣り合った角が等しいことを示せばよいことを知らせる。</li> </ul>	プリントを活用
まとめ	<ul style="list-style-type: none"> <li>本時の学習内容を言葉でまとめる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>長方形、ひし形の対角線の性質を言葉でまとめさせる。</li> <li>長方形とひし形の性質をもとに、正方形の性質を考えさせる。</li> </ul>	プリントを活用

## (2) 結果と考察

### ア 見通し1 「生徒自らが図形を操作して、性質を発見すること」について

コンピュータを利用し自らが性質を見つけ、それを確かめる活動では、多くの生徒が積極的に取り組んでいた。また、「実際に動かして、見て確認できてよい。」「自分で操作できるので分かりやすい。」等の意見が出るなど、生徒の評判も良かった。さらに、85%の生徒がコンピュータ

を取り入れた授業は楽しかったと答えており、「またコンピュータを使った授業がしたい。」という意見も多数あった。以上のことから、体験を通して図形の性質に触れるという活動は、生徒の意欲を高めるために有効であったと考えられる。

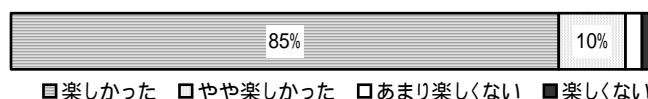
### イ 見通し2 「図形の変形や移動が、性質や特徴の発見に有効であるか。また、長さや角度を表示することは、性質の確認に有効であるかということ」について

授業後のアンケートでは、「コンピュータで図を動かしたことで、図形の性質を見つけやすかったですか。」という問いに対しては84%の生徒が「はい」と答えており、また「自分で動かしながら見ることができてよかった」「線や点を動かすことで、長さ角度が変わるので、すごくわかりやすかった」などの感想も見られた。このことから、コンピュータを用いて移動や変形の操作をしたことが、図形の性質の発見に役立ったと考えられる。また、「長さや角度を表示したことによって性質は確認しやすかったですか。」という問いに対しては90%の生徒が「はい」と答えており、さらに授業が進むにつれ生徒が自主的に長さや角度を表示して性質の発見に利用するなど、道具として活用されていた。これらのことから、長さや角度を表示できることは、確認ばかりでなく性質を見つける場面においても効果があると考えられる。

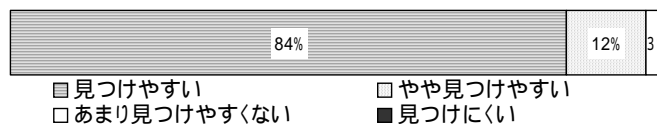
### ウ 見通し3 「論証の場面において、図形を自由に変形したりや補助線を加えたりする操作は、思考の助けとなるであろう」について

「定理の証明において、コンピュータの操作が参考になったか」という問いに対し「参考にな

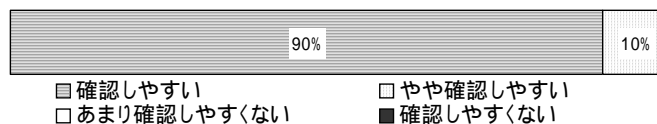
コンピュータを取り入れた授業は楽しかったですか。



図形を動かしたことで、性質を見つけやすかったですか。



角度や長さを表示することによって図形の性質が確認しやすかったですか。



った・やや参考になった」と答えた人は合わせて 92%である。また、「角度が出るので予想がしやすい」「言葉だけではなかなか理解できないことが、

簡単に理解できた」など、変形や補助線を引くという操作が少なからず、証明を組み立てていく上でヒントになったようである。ただ、授業の様子では、証明をプリントで行うように指示した

こともあって、プリント上の図を中心に考える生徒が多く、コンピュータの図に立ち返り、操作しながら証明を進める生徒は少なかった。また、個に応じるための手段として設けたヒントについては、「証明の参考になった」と答えた生徒が 41%程度と低く、内容や提示方法に工夫の必要があると感じた。

エ 見通し 4 「コンピュータを利用した授業を継続的計画的に行うことは直観力洞察力を伸ばす上で有効であるかということ」について

「コンピュータを操作することによって、予想は立てやすくなりましたか」という問いに対し 74%の生徒が「立てやすくなった」と答えている。このことから自ら図形の性質や特徴を予想し、それを確認するという体験を継続的に繰り返すことが、直観力を伸ばしていくことに効果があったと考える。ただ、洞察力という面では、証明の場面でこの教材が十分活用されなかったことから、成果は十分にはあげられていないと思われる。さらに、論証の場面においてコンピュータの活用の仕方について研究する必要があると感じた。

全体として、自ら操作し、自ら図形の性質や特徴を見つけ、実際に数値として確認することは、図形の性質や特徴を理解する上で有効であり、また、生徒の主体的な学習を促すことができたと考える。

## 研究のまとめと今後の課題

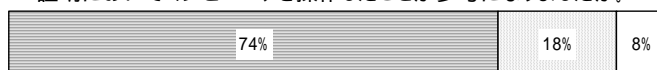
### 1 研究の成果

本研究では、中学校 2 年における図形の学習において、本教材を活用し実践を行った結果、以下のような成果が見られた。

コンピュータを利用して、実際に自らが図形を操作することは、抽象的な図形の性質を体験によって実感することができ、図形の性質を理解する上で効果的である。また、そのことが積極的に図形を調べようとするなど、生徒の学習に対する意欲の向上にもつながった。

試行錯誤しながら、図形の性質を自ら予測するという学習過程は、提示された内容について考えていくという従来型の学習に比べ、生徒の主体的な活動を促すことができる。また、角度や辺の長さを表示し図形を操作することにより、視覚的に図形の性質や特徴を確認する

証明においてコンピュータを操作したことが参考になりましたか。



参考になった                       やや参考になった  
 あまり参考にならなかった       参考にならなかった

それぞれの証明では、ヒントが参考になりましたか。



参考になった                       やや参考になった  
 あまり参考にならなかった       参考にならなかった

コンピュータを利用することによって、予想が立てやすくなりましたか。



立てやすくなった                       やや立てやすくなった  
 あまり立てやすくない                   立てやすくない

コンピュータの操作はしやすかったですか。



操作しやすい                               やや操作しやすい  
 あまり操作しやすくない                   操作しにくい

ことができ、図形の性質の理解には有効であった。

生徒自らが、図形を操作することをとおして、その性質や特徴を予想する活動を継続的に行ったことは、直観力の育成を図るという面においては効果的であった。

## 2 今後の課題

変形可能な図形教材を証明の場面では有効に活用しきれていないところがあった。そのため、洞察力の育成を図るという面においては十分に効果をあげることができなかった。このことをふまえ、コンピュータ上で提示する図形が証明の手がかりとなるように、図形の表示方法を工夫するとともに、ヒントページを充実し、個々の生徒の実態に応じられるように、ソフトの修正を行いたい。

他学年の図形の学習においても変形可能な図形教材を活用できる単元は多い。今後はそれぞれの単元で簡単に利用できる教材を作成し、生徒の体験活動の機会を増やせるようにしていきたい。

コンピュータ室は書く場所が狭いことや、生徒の活動の様子が教卓からは確認しづらいことなど、数学の授業を行う上では工夫が必要である。その解決の手だてとしてチームティーチングなどの指導法の研究も行っていきたい。

### < 参考・引用文献 >

- ・ 研究報告書 第 209 集 群馬県総合教育センター(2002)

### < 使用したソフト >

- ・ ホームページビルダー 7 (IBM Corp.)
- ・ 平面の図形 (大日本図書)

### < 商標について >

- ・ Java 及びその他の Java 関連の商標やロゴは、米国 Sun Microsystems 社の米国及びその他の国における登録商標または商標です。