

| | |
|-------------|----------|
| 群 教 七 | G03 - 04 |
| | 平15.214集 |

数学に意欲的に取り組む生徒を 育成する指導の工夫

— 生徒同士で考え、探求する活動を取り入れて —

特別研修員 北原 修 (群馬県立渋川女子高等学校)

I 主題設定の理由

現在、少子化や景気の低迷など様々な要因によって、社会が求める人材や能力が変わってきている。それに伴い、高校数学においても、知識理解や技能習得だけでなく、考え方や表現の方法などを身につける必要が増してきたと考える。

今回、研究対象とするのは、2年文型クラスである。このクラスは、将来、私大の文系学部の受験を考えている生徒が集まっている。1年次に数学に対する苦手意識をもったり、得意な文系科目に絞って学習を深めようと思ったりしている生徒たちである。そのため、「数学は受験科目にないのに」という思いをもちながら、授業を受けている生徒も少なくない。また、従来の授業を振り返ってみると、一方通行の講義中心の知識・技能習得型の授業で、生徒が積極的に発言できる場をほとんど設けていなかった。このような形態でも生徒は熱心に授業に臨んでいたが、受け身の授業のために数学を学習する意義を感じられず、一度わからなくなってしまうと興味を無くす生徒もみられる。

しかし、先に述べたように、高校数学の目標は、知識や技能の習得だけではなく、物事の見方や考え方を広げることである。この目標達成のために、まずは数学に興味・関心をもって意欲的に取り組む生徒を育てていきたいと考えた。

そこで、今回の研究では、授業を通じて生徒が、「数学の実社会での利用」「定義や定理を自ら見つけ出す体験」「数学を理解できる喜び」を感じられる授業づくりを目指していきたいと考える。生徒がこれらのことを感じるためには、一方通行の講義ではなく、生徒が自ら授業に参加し、学習内容や学習する意義について考えていく必要がある。そのために取り入れるのが、生徒同士で考え、探求する活動である。このような活動は、小学校の算数や中学校の数学の学習では、日常的に工夫され、実践されていることと思う。しかし、高校では大分少なくなっていると思われる。見るもの聞くもの全てに好奇心をもって生き生きと学習をしていた小中学生のころの気持ちに戻って、学習に取り組んでほしいという願いをもった。高校においても、生徒同士で考え、探求する活動を取り入れれば、生徒は自ら規則や性質を発見し、学習内容を理解できた喜びを実感でき、数学に意欲的に取り組むようになると考え、本主題を設定した。

II 研究のねらい

数学の学習において、生徒同士で考え、探求する活動を取り入れることによって、生徒が数学に意欲的に取り組むようになることを実践を通して明らかにする。

III 研究の見通し

1 つかむ過程において、身近な事象に関する問題を生徒同士で考えることや、その問題を解

決する上で新たに必要な考え方や記号について、生徒自身が探求する活動を取り入れることによって、生徒が定義や記号を深く理解し、数学に対する興味・関心が芽生えるであろう。

2 追求する過程において、定理や公式の証明、グラフの性質などを生徒同士で考え、規則や性質を探求する活動を取り入れることによって、規則や性質を発見する喜びを感じ、数学のおもしろさに気づくであろう。

3 まとめる過程において、生徒同士で、学習した内容に関する問題と解答を作成する活動を取り入れることによって、学習内容の理解が深まり、意欲的に数学に取り組むであろう。

IV 研究の内容と方法

1 研究の内容

(1) 数学に意欲的に取り組む生徒について

本研究において、数学に意欲的に取り組む生徒とは、受験勉強や定期テストのための知識や技能の習得だけを目指す生徒ではない。身近な事象に関する問題解決において、新たに必要となる考え方や記号などを探求したり、問題を作成し、考察したりすることで、規則や性質を自ら発見し、学習内容を理解できる喜びを味わいながら、数学の学習に取り組む生徒である。

(2) 生徒同士で考え、探求する活動について

生徒が数学に対して苦手意識をもったり、学習意欲を失ったりする原因の一つとして、本研究では、生徒が「今、何をやっているのだろうか」「この単元は実社会においてどのように活用されているのだろうか」という思いを抱きながら授業に臨んでいることに注目した。従来の授業では、生徒が定義や記号をよく理解できないままに授業が進んでしまっていることも少なくない。また、定理や公式を説明しては、それを利用した問題演習と解説に終始するために、実社会での活用場面などを実感できないでいると考える。

こうした点を改善するために取り入れてみようと考えたのが生徒同士で考え、探求する活動である。具体的には次の三つの活動である。つかむ過程において、身近な事象に関する問題を生徒同士で考えることや、その問題を解決する上で新たに必要な考え方や記号について、生徒自身が探求する活動。追求する過程において、定理や公式の証明、グラフの性質などを生徒同士で考え、規則や性質を探求する活動。まとめる過程において、生徒同士で、学習した内容に関する問題と解答を作成する活動である。これらの活動を取り入れることによって、生徒は学習内容を深く理解し、考え方や表現が実社会で生かせることを実感できると考える。さらに、生徒が「自分でも数学はやればできるんだ」という喜びを感じることによって、数学に意欲的に取り組むようになると考える。

2 研究の方法

研究の見通しに基づき、次のような計画で授業実践を行い検証していく。

(1) 授業実践計画と抽出生徒

| | | | |
|-----|---------------------------|----------|---|
| 対象 | 群馬県立渋川女子高等学校 2年1組(41名) | 抽出 生徒 | A子：授業中も積極的に発言をし、クラスの雰囲気を明るくしている。クラスの中では数学を得意としているが、「受験に使わないのに、なぜ数学を勉強するの」と時々発言する。数学が実生活でどのように活用されているか理解できるようにしたい。 B子：授業中、静かにノートを取っているが、数学の学習に興味がない。授業に積極的に参加できるようにしたい。 |
| 単元名 | 対数と対数関数 | | |
| 時数 | 9時間 | | |
| 期間 | 平成15年10月中旬～ 11月中旬 | | |
| 授業者 | 北原 修 | | |

(2) 検証計画

| 検証項目 | 検証内容 | 検証方法 |
|------|---|--|
| 見通し1 | つかむ過程において、バクテリアの増殖に関する問題を生徒同士で考え、この問題を解決するためには新たな記号の導入が必要であることに生徒自身が気づき、対数記号 \log について探求する活動を取り入れることは、生徒が定義や記号を深く理解し、数学に対する興味・関心が芽生えるのに有効であったか。 | ・授業観察 (話し合いの様子、発言) ・ノート ・プリント |
| 見通し2 | 追求する過程において、対数関数や指数関数について、 x と y の表を作成し、点をプロットしてグラフを書き、その性質を生徒同士で考え、探求する活動を取り入れることは、生徒がグラフの形や性質、対称性などを発見した喜びを感じ、数学のおもしろさに気づくのに有効であったか。 | |
| 見通し3 | まとめる過程において、生徒自身が、対数関数に関する問題と解答を作成する活動を取り入れることによって、学習内容の理解が深まり、意欲的に数学に取り組むのに有効であったか。 | |

V 研究の展開

1 単元の考察と目標及び評価規準

| | | | |
|------|---|--|--|
| 単元考察 | <p>数学Ⅰの二次関数の単元で、関数の基礎を学習してきた。数学Ⅱでは様々な関数として、三角関数と指数・対数関数を学習する。対数関数については、指数関数の学習した後、逆関数として学習するため、生徒にとっては \log などの新たな記号が導入され、扱いにくい面があるので、常に指数との対応を考えていく必要がある。</p> | | |
| 目標 | <p>指数をもとに対数を定義し、対数の基本的な計算をできるようにする。対数関数を定義し、グラフについて、指数関数との関係や基本的な性質を理解する。対数方程式や不等式を解けるようにする。</p> | | |
| 評価規準 | 関心・意欲・態度 | <ul style="list-style-type: none"> ・指数関数 $y = a^x$ について y の値から x の値を求める過程で、整数や分数で表せない数について、それを表現する方法を考えている。 ・グラフを書く作業や問題を作成する作業に進んで取り組んでいる。 | |
| | 数学的な見方や考え方 | <ul style="list-style-type: none"> ・指数関数と対数関数の関係から対数の性質や計算方法を導き出すことができる。 ・二次関数に置き換えることによって、最大値・最小値を求めることができる。 | |
| | 表現・処理 | <ul style="list-style-type: none"> ・点のプロットによってグラフをかくことができる。 ・対数の性質から対称移動、平行移動したグラフをかくことができる。 ・対数方程式、対数不等式を解くことができる。 | |
| | 知識・理解 | <ul style="list-style-type: none"> ・指数関数との関係をグラフによって理解している。 | |

2 指導計画及び評価計画(全9時間)

| 時 | ねらい | 学習活動 | 支援及び指導上の留意点 | 評価項目(評価方法) |
|---|--------------------|---|---|---|
| 1 | ○ 指数の逆の考え方である対数の存在 | ○ 1分後に2倍に増えるバクテリアに関して、元の y 倍になるのは x 分後と | ○ はじめは4, 8, 32倍などの答えが整数値で出るものを、次に5倍にして \log を使わないと答 | 【表】 y の値を与えられて x の値を求めることができる。(ノート、 |

| | | | | | |
|---|--|--|---|--|------|
| 2 | <p>在を認識し、その表現を工夫する。</p> <p>○指数関数の性質から対数の性質を導き出す。</p> | <p>いう問題で、yの値を与えられて、xの値を求める問題を考える。</p> <p>○今までの表現では表せないxの値をどう表現するかを班の中で考えを出し合う。</p> <p>○指数法則から導かれる対数の性質について、班ごとに考える。</p> | <p>えられない値を示して考えるきっかけをつくる。</p> <p>○対数の表現には底と真数が必要だと気づけるように支援する。</p> <p>○Σの記号の例を示して考えを助ける。</p> <p>○計算法則ではなく、底の条件や真数条件などのきまりについて検討できるように机間指導する</p> | <p>発言)</p> <p>【関】対数を表現する工夫をしている。(ノート、観察)</p> <p>【関】話し合いに積極的に参加している。(観察)</p> | 見通し1 |
| 3 | <p>○指数法則から対数の計算法則を導き出し、それを活用して計算する。</p> | <p>○対数と指数の関係を利用して対数の値を求める。</p> <p>○指数法則から対数の性質を導き、それを利用して対数の計算を行う。</p> | <p>○指数表現と対数表現を行き来する作業によって対数の定義をより深く理解できるようにする。</p> <p>○指数法則を復習し、対数の性質を導き、計算方法を丁寧に説明する。</p> | <p>【考】指数法則をもとに対数の性質を導くことができる。(ノート、観察)</p> <p>【表】対数の性質を利用して対数の計算ができる。(ノート、観察)</p> | |
| 4 | <p>○対数関数を定義しグラフをかき、対数関数グラフの性質を理解する。</p> | <p>○点をプロットすることによりグラフの概形をつかみ、グラフから読み取れる性質を班ごとに見つけ出す。</p> <p>○指数関数との関係をグラフを書くことによって感得する。</p> <p>○グラフから対数関数の性質を確認する。</p> | <p>○底が2, 1/2, 3, 1/3の対数関数のグラフを三つの座標に書いてみるように指示する。</p> <p>○$y = 2^x$と$y = \log_2 X$のグラフを書いたり、紙を折って作り、裏から透かしてみることで、形が同じことを確認したあとで、$y = x$に関する対称性の説明を補足する。</p> <p>○底によるグラフの向きの違いや対称関係などの性質を確認する</p> | <p>【表】表を作り、点をプロットする作業を行っている。(ノート、観察)</p> <p>【知】底の違いによるグラフの向きや対称性などを理解している。(ノート、発言)</p> | 見通し2 |
| 5 | <p>○対数方程式、不等式を解く。</p> | <p>○対数の性質に注意をして、対数方程式・不等式を解く。</p> | <p>○真数条件を忘れてしまう生徒が多いので、机間指導で注意を促す。</p> | <p>【表】対数方程式、対数不等式が解ける。(ノート、観察)</p> | |
| 6 | <p>○二次関数の置き換えによる最大最小の問題を解く。</p> | <p>○最大値最小値とそのときのxの値を求める問題を解く。</p> | <p>○変数を置き換えるとその変数に対して新たな定義域を考えなければいけないことに注意する。</p> | <p>【考】二次関数の考え方が使えることを理解し、活用できる。(ノート、観察)</p> | |
| 7 | <p>○演習問題を解けるようにする</p> | <p>○各種演習問題を解く。</p> | <p>○生徒を指名し、黒板に書いた解答について解説する。式と答えだけを書いてしまう生徒がいるので、書き残さなくてはならないことなどについて注意する。</p> | <p>【表】問題を解くことができる。(ノート)</p> <p>【表】記述式の問題で他人にわかり易い記述ができています。(ノート、板書)</p> | |
| 8 | <p>○班ごとに予想問題作り</p> | <p>○対数関数に関する問題を自分たちで作成し、解答</p> | <p>○真数や底の条件、問題を解くために必要な条件が足りているか</p> | <p>【関】積極的に問題を作成し、それをまとめる</p> | 見通し |

| | | | | | |
|---|------|------|-------------------------|----------------|--------|
| 9 | をする。 | も作る。 | 注意をして問題を作成するよう 助言する。 | ことができる。(観察、発表) | し 3 |
|---|------|------|-------------------------|----------------|--------|

VI 研究の結果と考察

1 つかむ過程において、バクテリアの増殖に関する問題を生徒同士で考え、この問題を解決するためには新たな記号の導入が必要であることに生徒自身が気づき、対数記号 \log について探求する活動を取り入れることは、生徒が定義や記号を深く理解し、数学に対する興味・関心が芽生えるのに有効であったか

第1時のはじめに、「1分後に2倍に増えるバクテリアの問題」を出してみたところ、生徒は、いつもと違う雰囲気を感じたようだった。毎回、単元のはじめは教科書に出てくる定義や記号の説明から始まるのに、いきなりクイズのような問題提起からスタートしたことに生徒は新鮮さを感じたようだった。まず、「このバクテリアが4倍に増えるのは何分後か。」「8倍は。」「32倍は。」と答えが整数値になる質問をしたところ、多くの生徒が声を出して正解を答えていった。次に、「では、5倍になるのは。」と質問したところ、「5/2だ。」と言ったり「そんなのではない。」と言ったりといくつか意見が出てきた。そこで、 x 分後のバクテリアの数 y の関係はどのようになっているのか尋ねたところ、A子が「 $y = 2^x$ です。」と答えたので、そのグラフを板書して、 $y = 4$ と $y = 8$ の点を書き込んだ。そこで改めて「5倍になるのは。」と聞いたところ、A子が「2. いくつ。」と答えた。

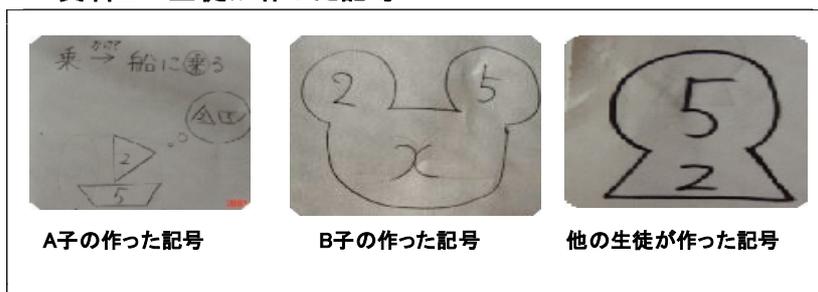
バクテリアの数が5倍になる x の値が存在することは全員納得した様子だったので、次にこの数を表す方法を考えてみようと言った。まず、この数を言葉で説明できるように班で考えた。B子を指名すると「2をそれ乗すれば5になる数。」と答えた。そこで、今度はこの数を表す記号を各班で作ってみようと言ったところ、すぐに記号を考える生徒と戸惑う生徒が見られたので、ヒントとして数列の和の記号 Σ の例を示したところ(資料1)、それをもとに全員が考え始めた。ヒントを示したことで生徒は記号の中に2と5の数字を取り入れながら、 \log にあたる部分を思い思いに作っていた(資料2)。考えた記号を各班に発表してもらったところ、 \log の部分だけが違うだけで、各班とも同じような形になったことを確認して、実際はこの数を $\log_2 5$ と表し、対数という数だと説明した。すると、例年は記号にとまどい、「数」という認識ができない生徒もみられたが、自分たちで記号を考えることにより、これは特殊な形をしているが、「数」であり、今までの表現で表せないから、新たな記号を導入したのだということ全員が理解できた。以前は単元のはじめに新たな定義の説明をされて、整理ができないうちに問題演習に移り、今

資料1 Σ の記号の例

例えば $\sum_{k=1}^{10} 3^k$ の場合 「一般項(第 k 項)が 3^k で初項($k=1$)から第10項までの和」を表すために、和を表す Σ の周りに 3^k , $k=1$, 10 が付いてひとつの記号になっている。

同様に、「2をそれ乗すれば5になる数」を表すためには記号の中に2と5が含まれなければならないことに注意して記号を考えてみよう。

資料2 生徒が作った記号



A子の作った記号

B子の作った記号

他の生徒が作った記号

何をやっているのかわからないまま授業が進むので、興味を失ってしまう生徒がいた。しかし、この方法を取り入れたことで、生徒は自ら考え、記号を探索することで理解が深まり、数学の授業に興味・関心が芽生え始めたのを感じた。また、数学以外の身近な話題から授業を始めたことに対して、生徒は「バクテリアの数なんて調べる機会がない。」などと言いつつも、以前のような教科書の説明から始めた授業と比べたら、興味をもって取り組んだことは、授業後の「具体的な問題でわかりやすかった。」や「数学の使い道を他にも知りたい。」などの感想からもうかがえる。さらに、対数の性質を考える学習においても、バクテリアの数だから負にはならないことから「真数は正である」などの性質を見つけ出すのにも有効であった。

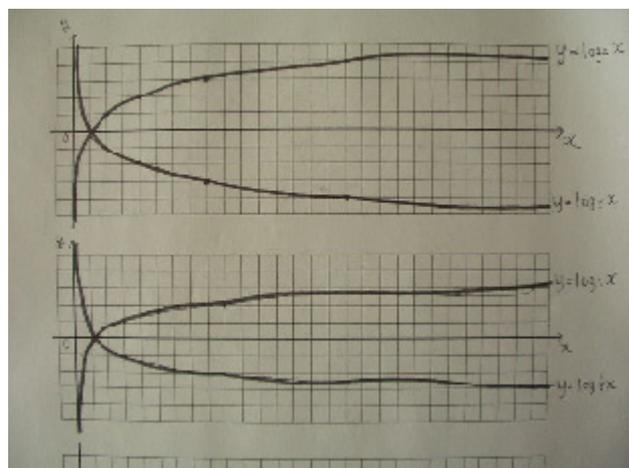
以上のように、つかむ過程において、バクテリアの増殖に関する問題を生徒同士で考えを交流し、この問題を解決するためには新たな記号の導入が必要であることに生徒自身が気づき、対数記号 \log について探求する活動を取り入れることは、生徒が定義や記号を深く理解し、数学に対する興味・関心が芽生えるのに有効であったと考える。

2 追求する過程において、対数関数や指数関数について、 x と y の表を作成し、点をプロットしてグラフを書き、その性質を生徒同士で考え、探求する活動を取り入れることは、生徒がグラフの形や性質、対称性などを発見した喜びを感じ、数学のおもしろさに気づくのに有効であったか

関数のグラフの性質を知るために、 x の値を整数値にした表を作り、座標平面上に点をプロットし、それを結ぶことによってグラフを書く作業を取り入れた。これまでも、授業でグラフを扱うときには必ずこの作業を取り入れてきたが、一つ二つ具体的な関数について書くと、あとは一般化してしまい、グラフの性質に気づくような作業までは取り入れてこなかった。今回、生徒に方眼の入った座標平面を三つ与え、一つには底が2と1/2の対数関数のグラフを、一つは底が3と1/3の対数関数のグラフを、もう一つには底が2と3の対数関数のグラフを書く作業を取り入れた(資料3)。

生徒は x の値と y の値の表を作成し、それぞれ座標平面にグラフを二つずつ書いた。書いた後にグラフを見て、気づいたことを班ごとに話し合った。A子は普段から積極的なので、活発に意見を出していた。B子も班で出された意見にうなづく仕草は見られた。話し合い後、各班に発表してもらうと、A子の班からは「 y 軸が漸近線になっている。」という意見が、B子の班からは「2と1/2、3と1/3のグラフは x 軸対称になっている。」という意見が出された。その他の班からも「みんな(1,0)を通過している。」や指数関数が底

資料3 A子の書いたグラフ

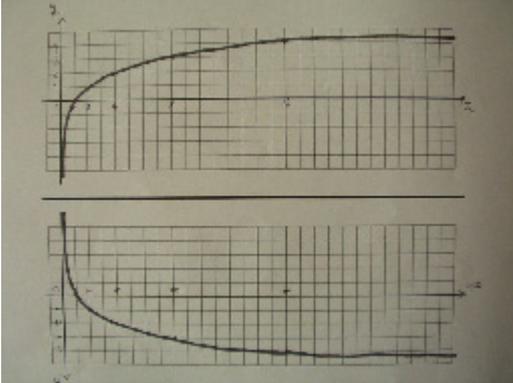


によってグラフが違ったことを覚えていたので「2と3は上がっていて、1/2、1/3は下がっている。」という意見も出た。一方、底が2と3を書いた座標平面からは、真数が同じ時の底の違いによる大小関係や点(1,0)を境に上下が逆転することに気づくことを意図したのだが、それを指摘した班はなかった。しかし、その後、対数関数の一般形や様々な性質を教科書で確認したところ、自分たちが探し出したことがほとんど教科書にまとめられているのを見て、教科書に載っていることを自分たちで発見し、理解できたことに喜んでいる様子であった。

次に指数関数と対数関数の直線 $y = x$ に関しての対称性を確認する作業を行った。裏から透

かしてみると指数関数と対数関数が入れ替わるように向きを工夫した二つの座標平面を印刷した用紙を生徒に配布した(資料4)。その用紙に底が2の指数関数と対数関数のグラフをそれぞれ書き、それを眺めて気づいた点をまとめることにした。生徒はグラフは書けたのだが、書いた面から見ていただけだったので、「いろいろな角度で見てごらん。」と提案した。すると、B子は紙を回転して見ていた。A子は裏返して見ることに気づき、同じ形になっていることを実感し、さらに底が1/2のグラフも書いて確かめていた。他の生徒も裏から透かして見ると同じ形になることを確認できた。しかし、この事実が $y=x$ に関しての対称性であるということに繋げることはやや難があったが、関連があるということは自分自身の目で確認できたために、その後の授業でも関心が高まっていた。

資料4 B子の書いたグラフ



以上のように、追求する過程において、対数関数や指数関数について、 x と y の表を作成し、点をプロットしてグラフを書き、その性質を生徒同士で考え、探求する活動を取り入れることは、生徒がグラフの形や性質、対称性などを発見した喜びを感じ、数学のおもしろさに気づくのに有効であったと考える。

3 まとめる過程において、生徒自身が、対数関数に関する問題と解答を作成する活動を取り入れることによって、学習内容の理解が深まり、意欲的に数学に取り組むのに有効であったか

まとめる過程で、班ごとに問題作りに取り組んだ。普段は問題を解く立場なので、初めは戸惑う生徒も見られたが、「たまには逆の立場になって問題を作ってみれば、新たな発見や理解ができると思うよ。」と伝えると、熱心に取り組んでいた。問題における式、数、与えられた条件の意味について理解を深めたり、問題を作成することで解法の手順を逆から見ることができ、解法に関する理解が深まったりすると考えた。

多くの生徒が「 $\log_2 x = 3$ 」「 $\log_2 x < 3$ 」のようなタイプの方程式・不等式の左辺の真数の一次式と右辺の数字を変えたものをつくった。B子も「 $\log_2(x-2) = 2$ 」という問題と「 $x = 6$ 」という答えをつくった。このタイプの問題をつくった生徒がいくつか問題と答えを発表すると、どの問題も答えを必ず求めることができ、それは決まって一つであった。そこで、なぜ数と式を適当に変えても答えが一つだけ出るのは生徒同士で考えた。A子の班を指名すると、「方程式の解は1年次に二次方程式で学んだことと同様、グラフの交点の x 座標に一致する。対数関数は値域が実数全体だから必ず交点を持つ。また、単調に増加・減少だから一つだけ交点を持つから適当に数字を変えても必ず答えが一つ出てくる。」と図を利用して説明した。生徒は自分たちがつくった問題で、対数関数のグラフの性質やグラフと方程式の関係を改めて確認できたことで理解が深まった様子で、意欲の高まりを感じた。

資料5 A子の作った問題と解答

A子の班は「 $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$ 」のタイプの方程式の作成に挑戦した(資料5)。4の部分に3に換えてみたら、二次式が因数分解できなくなってしまい答えが出せなかった。他の班も数字を適当に変えたために、答えが出せなかった。すると、一人の生徒が「解の公

式で解けるのでは。」と言ったので、黒板で試してみた。見事に答えが出ると感激の声もあがった。事前の問題演習では因数分解できる形しか扱ってこなかったのが、解の公式を利用する問題まで発展したことは、うれしい誤算であり、この取組が大変有効であったことを物語っている。

以上のように、まとめる過程において、生徒自身が、対数関数に関する問題と解答を作成する活動を取り入れることは、学習内容の理解が深まり、意欲的に数学に取り組むのに有効であったと考える。

Ⅶ 研究のまとめと今後の課題

- 身近な事象に関する問題を取り入れたことで、授業に興味・関心が芽生える効果は確かめられた。今後は追求する過程やまとめの過程においても、身近な話題を取り入れ、数学が実生活で生かされていることを実感し、数学の学習に興味関心をもって取り組めるような工夫をしていきたい。
- 対数関数のグラフを書き、性質を探求する活動では、生徒が性質を発見しやすいように同一平面上に底の違う二つのグラフを書くという事前の工夫によって、性質を自ら発見できた喜びを感じ、学習内容の理解も深まった。これからも、生徒が規則や性質を自ら発見でき、学習内容の理解が深まるような活動をさらに工夫していきたいと考える。
- 問題を作成する活動を取り入れたことは、考えていた以上の効果を生み出した。対数関数の単元は文章題がほとんど無く、方程式や不等式などの計算問題が多いので、生徒は数字を変えるだけで終わってしまうだろうと考えていた。しかし、そこから対数関数の値域の確認やグラフの単調性の確認ができたことは大変意義があった。さらに、教科書では扱わなかった解の公式の利用問題まで発展できたことは、生徒にとっても追求する楽しさを感じられたと思う。今後、他の単元においても問題を作成する活動を積極的に取り入れることで、単元の復習だけでなく、学習内容の発展に繋がるような方法を考えていきたいと思う。

<参考文献>

- ・銀林 浩 著 『算数・数学なぜなぜ事典』 日本評論社(2000)
- ・銀林 浩 著 『算数・数学なっとく事典』 日本評論社(2000)