

群 教 セ	G03 - 03
	平 17.225集

関数的な見方や考え方のよさを味わう 関数指導の工夫

- 具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目して -

長期研修員 松井 宏義

〈研究の概要〉

本研究は関数指導において具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目することにより、関数的な見方や考え方のよさを味わうことを目指したものである。具体的な事象を考察することで、課題を把握する。表やグラフや式に表現する過程で関数的な見方や考え方に気付く。その関数的な見方や考え方を問題解決に活用することにより、関数的な見方や考え方のよさを味わうことができる。このように指導の工夫をしたものである。

キーワード 【数学 - 中 関数 関数的な見方や考え方 具体的な事象】

主題設定の理由

今日の社会は、国際化や情報化の進展など急速な変化が起こっている。そのような中で、生徒に求められている力は、自ら学び自ら考える「生きる力」である。これを受け、中学校数学科では、「数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」ことを目標としている。しかし、国立教育政策研究所による平成15年度の教育課程実施状況調査の結果によれば「数学が好き」という生徒は各学年45%程度と低い。そのおもな原因として、生徒が学習問題において疑問や不思議に思ったことを問題解決しながら、考えることの楽しさを味わう経験が少なかったことが考えられる。

また、同研究所の調査結果を内容、領域別に比較すると、数量関係の問題の通過率が設定通過率を下回る問題が多いことが分かる。置籍校における標準学力検査を見ると、式からグラフをかくような形式的な処理はできていたが、問題解決に表や式を活用できていないことが分かる。これは、領域の目標である具体的な事象の中にある二つの数量の変化や対応を調べることを通して、関数関係を見だし表現し、それを用いて考察する能力が養われていないためである。その原因の一つとして、教師が関数的な見方や考え方を具体的にとらえていないため、どのような学習活動を通して、一人一人の生徒に関数的な見方や考え方を育てていけばよいのかが明らかにされていないことがあ

げられる。

そこで、教師が領域を通して育てたい関数的な見方や考え方とは何かを明らかにし、それに視点をあてた授業を展開する。そうすることで、生徒はどのような見方や考え方から課題解決できたかを振り返ることができ、その見方や考え方を活用していけると考えた。また、一人一人の生徒が課題に対し興味・関心をもち、関数的な見方や考え方に気付きながら課題解決できるように、生徒が身近に感じる具体的な事象の考察を取り入れた。具体的な事象を表やグラフや式に表現しながら、関数的な見方や考え方に気付けるように指導の工夫をする。そうすることで生徒一人一人が学習していることの意味を理解し、関数的な見方や考え方に気付き、その活用能力を高め、関数的な見方や考え方のよさを味わうことができると考えた。

以上のことから、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目して問題解決することにより、生徒が関数的な見方や考え方のよさを味わうことができると考え、本主題を設定した。

研究のねらい

関数指導において、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目して、具体的な事象を表やグラフや式に表現する活動、表やグラフや式を活用して問題解決する活動を行うことにより、生徒が関数的な見方や考え方に気付き、そのよさを味わえることを実践を通して明らかにしていく。

研究の見通し

- 1 つかむ過程において、具体的な事象から伴って変わる二つの数量を取り出し、表やグラフに表現する活動を行うことによって、生徒は伴って変わる二つの数量の変化の様子に気付くことができるであろう。
- 2 追究する過程において、具体的な事象と結び付いた表からグラフや式を導き出す活動を行うことによって、生徒は関数的な見方や考え方に気付くことができるであろう。
- 3 深める過程において、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目し、関数的な見方や考え方を活用し問題解決する活動を行うことによって、生徒は関数的な見方や考え方のよさを味わうことができるであろう。

研究の内容と方法

1 研究の内容

- (1) 「関数的な見方や考え方のよさを味わう関数指導」について

主な関数的な見方や考え方とそのよさを資料1のようにとらえた。

資料1 主な関数的な見方や考え方とそのよさ

関数的な見方や考え方	よさ
伴って変わる二つの数量に着目する見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> ・求めたい数量を他の数量に置き換えて考えられる。 ・具体的な事象の因果関係を数理的に解明し構造的にとらえられる。 ・未来のことや未知のことに予測が立てられる。 など
変化の割合に着目する見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> ・関数の変化の特徴を一つの数量でとらえることができる。 ・具体的な事象で変化の割合を考えることで変化の様子の理解が深まる。 など
表に表す見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> ・二つの変数の対応を整理して表現できる。 ・表の値から増加量をよみとれる。 ・表を横に見ることで、変化の様子をとらえられる。 ・表をたてに見ることで、対応の仕方をよみとれる。 ・表を見比べながら、変化の違いに気付ける。 など
グラフに表す見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> ・連続量の変化の様子を視覚的に表現できる。 ・グラフ上の2点から増加量をよみとれる。 ・グラフの形で関数を分類してとらえられる。 ・方程式の解の集合をグラフとしてみられる。 ・グラフから具体的な事象の様子をよみとれる。 ・変域を視覚的にとらえられる。 など
式に表す見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> ・変数を使った一般的な表現としてとらえられる。 ・変化する値から増加量を計算により求められる。 ・対応する値を計算により求められる。 ・式の形で関数を分類してとらえられる。 ・式から具体的な事象の様子をよみとれる。 など

関数的な見方や考え方のよさを味わう関数指導とは、伴って変わる二つの数量に気付き、表やグラフや式に表現しながら関数的な見方や考え方に気付き、それを活用して問題解決することにより生徒がそのよさを実感する指導と考えた。

- (2) 「具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目して」について

関数的な見方や考え方を使って事象を考察するためには、具体的な事象を表やグラフや式に表現する過程で資料1に示す関数的な見方や考え方を育てる必要がある。具体的な事象と結び付けることで、一人一人の生徒が学習していることの意味を理解し、関数的な見方や考え方に気付いたり、身に付けたりすることが容易になる。

そこで、次の各過程において具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目した指導を取り入れることを考えた。

ア つかむ過程について

つかむ過程では、具体的な事象として、実験を取り入れる。実験を取り入れることの意義は、伴って変わる二つの数量の変化を直接見たり、感じ取ったりすることができるからである。この時、実験を通して得られたデータを表やグラフに表現することで、変化する値の組として、見やすく整理され、具体的な事象の変化の様子や対応の関係をつかむことができる。また、実験の中に、変化の様子を比較しながら考える場面を設定することで、具体的な事象と表やグラフに表現することの結び付きが深まり、変化の様子に気付くと考えた。

イ 追究する過程について

追究する過程では、学習問題を表で提示する際、具体的な事象の観察を取り入れた。学習問題の提示に具体的な事象の観察を取り入れることの意義は、具体的な事象の様子が表を通してグラフや式と結び付く。このことにより、一人一人の生徒の思考が始まり、関数的な見方や考え方に気付けるからである。

また、追究する過程で育てたい「変化の割合に着目する見方や考え方」は、生徒にはとらえづらい考え方である。そこで、具体的な事象を考察しながら、 x の増加量や y の増加量が表している数量を具体的にとらえる活動を通して、変化の割合に着目する見方や考え方に気付けると考えた。

ウ 深める過程について

深める過程では、身に付けてきた関数的な見方や考え方を活用し問題解決する具体的な事象の問

題として以下の条件を満たすものを考えた。

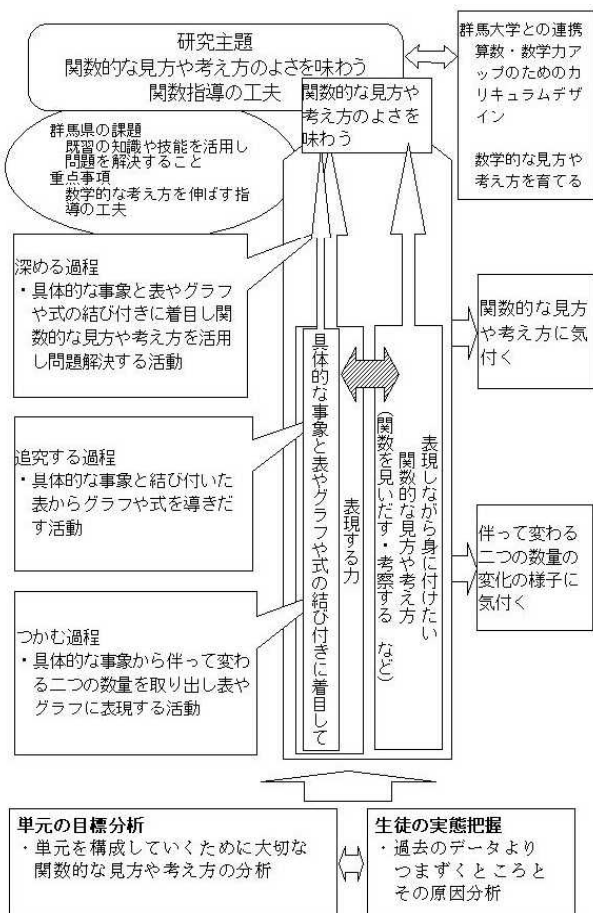
図を使って視覚的にとらえやすく、身近なこととして興味や関心をもちやすい問題。

伴って変わる数量を幾つか探し出すことができたり、問題解決の方法を何通りか考えられたりする問題。

表、グラフ、式を活用しながら問題解決できる問題。

この過程では、ただ与えられた問題を解くのではなく、一人一人が自分自身で関数関係を見いだしたり、関数的な見方や考え方を活用しながら問題解決し、解決後に追究した問題や方法を友達同士で振り返る。こうした学習活動を通して、生徒は活動を楽しみながら主体的に学習を行い、関数的な見方や考え方のよさに気づき、そのよさを味わえたと考えた。

図1 研究構想図



2 研究の方法

(1) 実践計画

対象	渋川市立渋川中学校 2年3組 34名
期間	平成17年10月7日～12月2日(18時間)
単元名	一次関数
授業者	長期研修員 松井 宏義

(2) 抽出生徒

A子	数学に興味・関心はあるが、比例・反比例の理解が不十分である。また、方程式を解く形式的操作も苦手である。そこで、実験や具体的な操作活動を通し、表やグラフや式に表現しながら関数的な見方や考え方の基礎を育て、それを活用しながら関数的な見方や考え方のよさを味わわせたい。
B子	計算力があり、式の形式的操作には慣れている。しかし、自分から気付いたことを発言したり、図をかいて考えたりしない。そこで、問題から自分で伴って変わる二つの数量を見だし、表やグラフや式に表す見方や考え方を活用し問題解決することにより、関数的な見方や考え方のよさを数多く味わわせたい。

(3) 検証計画

	検証内容	検証方法
見通し1	つかむ過程で、具体的な事象から伴って変わる二つの数量を取り出して実験を行い、そのデータを表やグラフにまとめる活動は、伴って変わる二つの数量の変化の様子に気付くための手だてとして有効であったか。	・学習活動の観察 (VTR授業記録) ・ワークシートに書かれた内容を分析する。 ・授業後の振り返りの内容を分析する。
見通し2	追究する過程で、具体的な事象と結び付いた表からグラフをついたり、変化の割合に着目して式をついたりする活動は、関数的な見方や考え方に気付くための手だてとして有効であったか。	・学習活動の観察 ・ワークシートに書かれた内容を分析する。 ・授業後の振り返りの内容を分析する。
見通し3	深める過程で、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目し、関数的な見方や考え方を活用し問題解決する活動は、関数的な見方や考え方のよさを味わうための手だてとして有効であったか。	・学習活動の観察 ・ワークシートに書かれた内容を分析する。 ・授業後の振り返りの内容を分析する。 ・授業後の感想 ・アンケート調査

研究の展開

1 単元名 一次関数

2 単元の考察

生徒は小学校第6学年の比例において、伴って変わる二つの数量について表やグラフを活用し、それらの関係を考察する能力を伸ばしてきた。

中学校第1学年では、比例・反比例の関係を見だし表現し考察する能力を伸ばしてきた。表現については表やグラフに加え式を活用することを学習した。また、変数の変域を負の数にまで拡張し、比例・反比例を考察してきた。

これらの学習を受けて本単元では、関数を定義し一次関数について理解するとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を養うことになる。また、二元一次方程式の解が一次関数のグラフになることから方程式のグラフを理解し、連立

方程式の解をグラフの交点としてとらえることになる。この学習過程において具体的な事象と表や

グラフや式の結び付きに着目して、関数的な見方や考え方のよさを味わわせていく。

3 単元の目標及び評価規準

(1) 単元の目標

具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、一次関数について理解するとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を養う。

(2) 単元の評価規準

数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、変化や対応を調べることを通して、関数関係を見だし、表現し、考察するなど、数学的活動の楽しさに気付き、関数の考えを意欲的に具体的な問題の解決に活用しようとする。	具体的な事象の中にある変化や対応についての見方や考え方を深め、事象を数理的にとらえ、見通しをもち論理的に考察することができる。	数量の関係を表やグラフや式で表し処理したり、関数関係を的確に表現したりするなどして、問題解決に一次関数を利用することができる。	一次関数の意味、変化の割合とグラフの特徴、問題解決への利用の仕方を理解している。

(3) 学習活動における評価項目

小単元	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
一次関数	伴って変わる二つの数量を表やグラフに表現しながら、変化の様子を考えようとしている。	伴って変わる二つの数量を見だし、表やグラフに表現することで、変化の様子をとらえることができる。		表やグラフから変化の様子を理解し、変化の仕方が一定の関数とそうでない関数があることを理解している。
一次関数の特徴	コンピュータの活用を通し、式とグラフを結び付けて考えることに興味・関心をもつ。一次関数を式で表現することで、関数の特徴をつかめたり、予測が立てられることに関心をもち、関数を式で表そうとしている。	xが1増加したときのyの増加量が一定であることから式を帰納的に導けることに気付く。傾きが正負の場合に着目し、グラフと式を結び付けながら一次関数の特徴をまとめることができる。 y=ax+bのaやbから具体的な事象の変化の様子がよくとれることに気付く。	表やグラフから変化の割合を求めることができる。切片が整数の一次関数で、変化の割合に着目してグラフをかくことができる。変化の割合(傾き)を活用しながら、一次関数の式を求めることができる。いろいろな考え方で一次関数の式を求めることができる。	y=ax+bで表される関数が一次関数であることを理解し、比例もb=0の一次関数ととらえている。一次関数の変化の割合は一定であり、aに等しいことを、具体的な事象と結び付けてとらえている。一次関数のグラフがすべてのxの範囲で直線になることを理解し、傾きや切片について理解している。xの変域に対するyの変域をグラフと結び付け理解している。
一次関数の利用	具体的な事象から関数を見だし、関数的な見方や考え方を活用し、変化の様子をとらえることで未知の数量が求められることに関心をもつ。	伴って変わる二つの数量を見だし、関数的な見方や考え方を活用し、問題解決することができる。		
関数と方程式		二元一次方程式の解が一次関数のx、yの値の組としてみることができる。	二元一次方程式のグラフを座標平面にかくことができる。	連立方程式の解がグラフの交点をよむことで求まることを理解している。
一次関数の利用	グラフの傾き方や交点を問題解決に生かすことで、グラフのよさに気付くことができる。	グラフや式の結び付きに着目し、問題解決することができる。		

4 単元指導計画

過程	時間	ねらい・主な学習活動	支援及び指導上の留意点 具体的な事象との結び付き	評価項目(評価方法) 「十分満足できる」と判断される状況 「努力を要する」生徒への手だて
つかむ過程	1 見直し1	<p>ねらい 関数的な見方や考え方</p> <p>具体的な事象から伴って変わる二つの数量を見だし、表やグラフに表現し変化の様子を考察することができる。 具体的な事象から関数関係を見だし、表やグラフに表現して変化の様子をとらえる。(表やグラフに表す見方や考え方)(伴って変わる二つの数量に着目する見方や考え方)</p> <p>太さと長さが違う2本の線香に、同時に火を付けたとき、どちらが早く燃え尽きるか考える。</p> <p>・予測するためには、どのような実験をし、その結果を何にまとめればよいか考える。 ・実験をしながら、火を付けてからの時間と長さの関係調べ、表とグラフにまとめる。</p> <p>表やグラフからどちらが早く燃え尽きるか予測し、他に気付いたことを考える。</p> <p>・気付いたことを発表し合う ・授業を振り返る。</p>	<p>具体的な事象を表やグラフに表現するために実験を取り入れる。</p> <p>・燃え方の違いに着目するために2本の線香を使う。 ・実験は、4人グループで行い、測定2人、記録2人の役割分担にする。</p> <p>・実験なので「およそ次のような傾向がある」といった表現で考えるように助言する。</p> <p>・1分ごとの燃える長さに着目しながら、いろいろな気付きができるように支援する。</p> <p>・変化の様子をとらえるために大切な考え方は何かを授業の振り返りの視点とする。</p>	<p>【見方や考え方】</p> <p>伴って変わる二つの数量を見だし、表やグラフに表現することで、変化の様子をとらえることができる。(発言、ワークシートの記入、振り返りの内容)</p> <p>表やグラフに表現することで、燃え尽きるまでの時間やどちらがどの位早く燃え尽きるかなど分析的に考えることができる。</p> <p>表やグラフから気付いたことをまとめる場面で、グラフから具体的な事象の様子をよみとる支援を行う。</p>

<p>2</p> <p>一次関数</p> <p>見通し2</p>	<p>表とグラフをもとに具体的な事象の変化の様子を考察し、変化が一定の関数とそうでない関数があることに気付く。 比較しながらいろいろな関数を分類する。 (表やグラフに表す見方や考え方)(伴って変わる二つの数量に着目する見方や考え方)</p> <p>4つの具体的な事象の変化の様子が示された図から二つの数量の関係を表にまとめ、グループ分けをする。</p> <p>表からyの増加、減少に着目したり、yの増加量に着目してグループ分けをする。</p> <p>4つの具体的な事象の変化の様子をグラフに表し、もう1度グループ分けを考える。</p> <p>グラフに表現した時、座標の点が直線上に並ぶ関数とそうでない関数に気付く。</p> <p>関数にはいろいろな変化の様子があることを知る。</p> <p>授業を振り返る。</p>	<p>前回の実験と反比例を含め4つの具体的な事象の変化の様子を図に表現しておく。</p> <p>ビーカーに水を入れ、時間とともに水の深さが変化の様子を観察できる教具を準備する。</p> <p>具体的な事象で、数量が変化する様子を表した図を用意する。</p> <p>表の見方には様々な見方があり、いろいろな視点から、グループ分けを考えられるように助言する。</p> <p>視覚的に特徴をとらえられるように、表、グラフの順で考えるように学習過程を組む。</p> <p>「表やグラフに表現したことで、どの様なことに気付くことができたか」を授業の振り返りの視点とする。</p>	<p>【知識・理解】 表やグラフから変化の様子を理解し、変化の仕方が一定の関数とそうでない関数があることを理解している。(観察、ワークシートの記入)</p> <p>表とグラフを結び付けながら変化の様子を理解している。</p> <p>表から変化の様子をよみとれるように矢印でx、yの増加量を書き込みながら考えるように支援する。</p> <p>【関心・意欲・態度】 伴って変わる二つの数量を表やグラフに表現しながら、変化の様子を考えようとしている。(観察、振り返りの内容)</p> <p>いろいろな関数の変化の様子を表とグラフを結び付けながらつかもうとしている。</p> <p>増加量の違いやグラフの外形の違いなど見る視点を示しながら考え方を支援する。</p>
<p>3</p> <p>一次関数の特徴</p> <p>見通し2</p> <p>追究する過程</p>	<p>具体的な事象をもとに表から式をつくることを通して一次関数($y=ax+b$)について理解する。</p> <p>値の変化に着目し、表から式を導く。(表や式に表す見方や考え方)(変化の割合に着目する見方や考え方)</p> <p>水そうに水を入れる二つの場合を比較しながら式を考える。</p> <p>比例の式をもとに、常に2cm深くなっていることから$y=ax+b$の式の形に気付く。</p> <p>5kgずつおもりを増やしていったとき、バネの長さが10cmずつ伸びる表から式を考える。</p> <p>(yの増加量)/(xの増加量)でaが求められることに気付く。</p> <p>式の形から一次関数を理解する。</p> <p>xの増加量に対するyの増加量が一定でありaになることに着目する。</p> <p>つくった式のa、bの意味を具体的な事象からよみとる。</p> <p>授業を振り返る。</p>	<p>変化のようすに着目して式を考えるために、前時の具体的な事象を表す表を活用する。</p> <p>水がたまる様子を観察するため左の教具を準備する。</p> <p>xの値が5ずつ増えていることに気付くように助言する。</p> <p>割り算が割る数の1あたり量になることをおさえる。</p> <p>yがxの一次式で表せることから、「一次関数」を定義する。</p> <p>式から具体的な事象をよみとる活動を重視する。</p> <p>「一次関数の式をつくるのに大切だと思った見方や考え方は何か」を授業の振り返りの視点とする。</p>	<p>【見方や考え方】 xが1増加したときのyの増加量が一定であることから式を帰納的に導くことに気付く。(発言、ワークシートの記入、振り返りの内容)</p> <p>xの増加量が1ずつ増えていなくても、割合に着目することで、yの増加量が一定であることから式を帰納的に導くことに気付く。</p> <p>表から式が考えられない生徒については、$x=1, 2, 3$の式を考えながらxを使った式を導けるように支援する。</p> <p>【知識・理解】 $y=ax+b$で表される関数が一次関数であることを理解し、比例も$b=0$の一次関数ととらえている。(観察、発言)</p> <p>具体的な事象と結び付けて、a、ax、bの意味を十分理解し、$y=ax+b$で表される関数が一次関数であることを理解している。</p> <p>できた式を具体的な事象に照らし合わせながら変数x、yと定数a、bの意味をつかめるように支援する。</p>
<p>4</p> <p>一次関数の特徴</p> <p>見通し2</p>	<p>一次関数($y=ax+b$)の変化の様子をx、yの増加量からとらえ、一次関数の変化の特徴を理解する。</p> <p>変化の割合に着目する。(変化の割合に着目する見方や考え方)</p> <p>バネの長さとおもりの重さの関係が$y=3x+5$のバネで、xの値が1から3まで増加するときの(yの増加量)/(xの増加量)を考える。</p> <p>(yの増加量)/(xの増加量)をxが1kg増えたときのバネの長さの増加量としてとらえる。</p> <p>他の一次関数でも、(yの増加量)/(xの増加量)を求めることで、xの増加量に比例なく(yの増加量)/(xの増加量)が一定であることを理解する。</p> <p>一次関数の変化の特徴をまとめ、変化の割合について理解する。</p> <p>授業を振り返る。</p>	<p>xの増加量、yの増加量を理解し変化の特徴をまとめるために、具体的な事象を提示する。</p> <p>xの増加量とyの増加量をとらえられるよう、バネにおもりをつるす事象を準備する。</p> <p>増加量を求めるのに、どの値からどの値を引けばよいか求め方を整理できるように表の活用を提示する。</p> <p>関数の変化の特徴をとらえるために大切な見方や考え方は何か」を授業の振り返りの視点とする。</p>	<p>【表現・処理】 表やグラフから変化の割合を求めることができる。(観察、ワークシートの記入)</p> <p>表やグラフから変化の割合が分数や負の数の場合にも、正確に求められる。</p> <p>xの増加量、yの増加量を表をつくって求めるように支援する。</p> <p>【知識・理解】 一次関数の変化の割合は一定であり、aに等しいことを、具体的な事象と結び付けてとらえている。(観察、振り返りの内容)</p> <p>変化の割合について深く理解し、様々な問題解決に適切に活用できる。</p> <p>値段と個数など身近な一次関数を取り上げ、変化の割合が一定であることを理解できるように支援する。</p>
<p>11</p> <p>一次関数の利用</p> <p>見通し3</p> <p>深める過程</p>	<p>具体的な事象から、伴って変わる二つの数量の関係を見だし、問題解決する。</p> <p>具体的な事象から関数を見だし、その関係に着目しながら問題解決する。(表や式に表す見方や考え方)(伴って変わる二つの数量に着目する見方や考え方)</p> <p>右の図から変化の様子を把握し、変化する数量を見だし、白い正方形が100枚になったときの数量を求める。</p> <p>伴って変わる数量を見だし、表から変化の規則性をつかみ、式を使って、自分の考えた問題を解決する。</p> <p>4人の班で、一人一人が考えた関数を発表し合い、いろいろな視点で変化する数量を見いだせることを知る。</p> <p>班ごとに追究した関数の中から1つ選びカードにまとめ黒板に提示する。</p> <p>授業を振り返る。</p>	<p>変化する数量を見だし、表や式で考察するために変化をとともなう図を活用する。</p> <p>例題を一つ取り上げる。</p> <p>数量の意味がとらえられない場合、補足説明をする。</p> <p>図をかきながら考えられるようなワークシートを準備する。</p> <p>式をつくった生徒は、a、bの表す意味を図でとらえられるように助言する。</p> <p>「今日の学習を通して大切だと思った見方や考え方は何か」を授業の振り返りの視点とする。</p>	<p>【見方や考え方】 伴って変わる二つの数量を見だし、関数的な見方や考え方を活用し、問題解決することができる。(観察、ワークシートの記入)</p> <p>伴って変わる二つの数量をいろいろな見だし、表や式を活用し、問題解決することができる。</p> <p>見いだした数量を表にまとめ、変化の割合に着目することで、一次関数の式が求められるように支援する。</p> <p>【関心・意欲・態度】 具体的な事象から関数を見だし、関数的な見方や考え方を活用し、変化の様子をとらえることで未知の数量が求められることに関心をもつ。(観察、振り返りの内容、授業後の感想)</p> <p>伴って変わる二つの数量をいろいろな見だし、意欲的に問題解決しようとしている。</p> <p>図をかきながら、伴って変わる二つの数量を見だし問題解決できるように支援する。</p>

12	具体的な事象から問題を見付けだし、グラフを活用し問題解決する。具体的な事象に関わる問題をグラフを活用しながら考える。(グラフに表す見方や考え方)(変化の割合に着目する見方や考え方) 時間と道のりを表したグラフから式をつくり、 x や y の値を代入し、時間や道のりを求める。 ・グラフの傾きが速さを表すことを理解する。 10分早く着く方法としてどのような方法があるかグラフを活用し、いろいろ考える。 ・具体的にどのような方法があるかをグラフで考える。 ・自分で考えた方法を時間と速さに着目し、説明できるようにする。 ・考えた方法を黒板で発表する。 ・授業を振り返る。	時間と道のりの関係を表すグラフを活用する。 ・グラフについては、目盛りが1でないものの活用を考える。 ・目盛りに注意し、変化の割合を求めよう助言する。 ・二つの方法を考えた生徒には、それぞれのグラフを式で表すように発展課題を指示する。 ・いろいろな考え方を発表できるようにする。 ・グラフを画用紙に拡大したものを用意し、発表に活用する。 ・「今日の学習を通して、大切だと思った考え方は何か」を授業の振り返りの視点とする。	【見方や考え方】 グラフを活用し、問題解決することができる。(観察、ワークシートの記入、振り返りの内容) グラフを活用し、いろいろな問題解決の方法を見いだすことができる。問題解決をする条件は何かをグラフ上で考えるように支援する。 グラフの傾きが具体的な事象で何を表しているかに着目しながら考えるように支援する。
		16 伴って変わる二つの数量の関係を変域を考えながら、グラフや式に表し、問題解決できる。具体的な事象の変化の様子から $y=k$ のグラフを理解することができる。伴って変わる二つの数量の関係をグラフや式を活用しながら問題解決する。(グラフや式に表す見方や考え方) 長方形ABCDの辺上をAからDまでPが動くとき、Pの動いた距離とAPDの面積の関係を考える。 ・変化の様子が一定ではないことに気付き、グラフを使って、変化の様子を予想する。 ・PがAB上にある時の変化の様子を式、グラフの順で考える。 ・PがBC上にある時の変化の様子をグラフ、式の順で考える。 PがCD上にある時の変化の様子を自分の考え方で追究する。 ・直線のグラフから式を考えた生徒の考え方を理解する。 ・図から式を考えた生徒の考え方を理解する。 ・授業を振り返る。	点Pが移動するとAPDの面積が変化する様子を観察するためパソコンを活用する。 ・ x が常にAから動いた距離であることに留意しながら観察する。 ・APDの面積がどのように変わるかを自由に発言できるようにする。 ・グラフの概形を予想するためPがA上とD上にある時を示す。 ・式をもとに変域に気付いているか問う。 ・ $4 < x < 10$ では、 $y=k$ の式は指導者が説明する。 ・ $10 < x < 14$ については、式、グラフどちらから考えてもよいことを助言する。 ・両方の考え方を発表し、式やグラフを導くことは一人一人行う。 ・「今日の学習を通して、動点の問題を考えるときに大切だと思った考え方は何か」を授業の振り返りの視点とする。

研究の結果と考察

1 つかむ過程において、具体的な事象から伴って変わる二つの数量を取り出して実験を行い、そのデータを表やグラフにまとめる活動は、変化の様子に気付くための手だてとして有効であったか

1時間目の授業では、細くて長い線香と太くて短い線香の2本を提示しながら、「どちらの線香が早く燃え尽きるだろうか。」と問いかけた。多くの生徒が、「長くても細い方が早く燃え尽きそうだな。」と予想したが、「太くても短いから分からない。」という意見から、実際に燃やして調べてみようとして実験に取り組んだ。まず伴って変わる二つの数量に着目するために、「実験では何を記録すればよいか。」と発問した。生徒は「線香の燃えた長さ」「線香の長さ」と変化する量に着目したが「時間」という意見は少数であった。黒板に表を書くと「1分ごとの線香の長さを調べれば

いい。」という意見で、ほとんどの生徒が時間と線香の長さを伴って変わる数量ととらえた。

実験は4人の班で、1分ごとの長さを8分間記録しながら表やグラフにまとめた。実験をしながら「長くて細い方がどんどん燃えている。」「長くて細い方が早く燃えている。」など2本を比べることで、燃える様子に着目した言葉が聞かれた。

実験途中で、「どちらの線香が早く燃え尽きるかを表やグラフから予測しよう。」と発問し、その根拠をまとめたものが表1である。

表1 実験途中での予想の根拠

燃え方が速いから (A子)	9人
グラフを延長して考えたから	6人
減る量が多いから (B子)	5人
1分間に燃える長さが長いから	5人
グラフから減り方が多いから	2人
8分後の長さから	1人
理由なし	3人
無答	1人

この内容から燃える速さや1分間に燃える長さなど、変化の様子に着目していることが分かる。「燃え方が速い」という表現から、伴って変

わる二つの数量に気付けるように、「燃え方が速いとはどういうことか。」と問いかけたところ、「1分ごとに燃える長さが長い。」と1分あたりの燃えた長さで変化の様子を見ていることに気付きた。次に、「ほかに表やグラフから気付いたことをまとめよう。」と発問したところ生徒は表2に示す内容に気付いた。生徒は表やグラフから具体的な

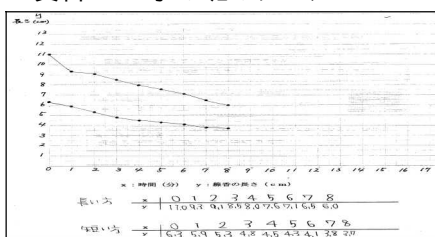
表2 表やグラフからの気づき

1分間に燃える長さがほぼ同じこと	12人
グラフが直線に近いこと	9人
変化の大きさをグラフの傾きでみている	12人
比例ではない	4人
燃えた長さは時間に比例している	2人
燃えつきる時間が予測できる	3人
両方のグラフが近寄ってきている	5人
同じ長さになるときが分かる	2人
グラフが上から下にきている	1人
時間が決まると長さも決まる	1人
1分間に燃えた長さを2本で比較	23人
その他	8人

ある生徒は、「身近にある線香の燃え方が比例でも反比例でもない何かだということに驚いた。この何かをもっと詳しく調べたい。」と振り返っており、線香を燃やす実験は、変化の様子に気付く有効な実験であると感じた。

A子は実験から「グラフを延長していくと途中で同じになります。そして、そのまま進んでいくと長い方が早く燃え尽きる。短い方は、少しずつ順調に燃えていくけど、長い方は、とても早くスムーズに燃えている。」と変化の様子に気付いていた。B子も得たデータ(資料2)から「だいたい1分間に同じくらい

資料2 B子の班のデータ



いずつ線香が燃えている。」と表やグラフに表す見方や考えから変化の様子に着目していた。

以上のことから具体的な事象から伴って変わる二つの数量を取り出して実験を行い、そのデータを表やグラフにまとめる活動は、伴って変わる二つの数量の変化の様子に気付くための手だてとして有効であったと考えられる。

2 追究する過程において、具体的な事象と結び付いた表からグラフをついたり、変化の割合に着目して式をついたりする活動は、関数的な見方や考え方に気付くための手だてとして有効であったか

2時間目の授業では、具体的な事象としてピーカーに水がたまる様子を観察した。変化する数量を自由に発言させたところ、「ピーカーの水の量」「深さ」「時間」などに着目できた。そこで、この事象の「時間と水の深さ」と「時間と線香の長さ」「おもりの重さとバネの長さ」の一次関数の表と「面積が一定の長方形の縦と横」の反比例の表を提示しながら、「四つの事象の変化の様子を表をもとにグループ分けしよう。」と発問した。

ここでは34人中25人がyの値の増加と減少に着目して分類した。yの増加量が一定か一定でないかに着目した生徒は5人であった。そこで、「自分で考えた以外のグループ分けを考えよう。」と助言したところ、yの増加量に着目する生徒が増えてきた。発表でいろいろなグループ分けを聞きながら、ある生徒は「表にしてみるだけでも、あれだけいろいろな考え方が出てくるんだと思った。思いもつかなかった考えもあって、びっくりした。」と表に表す見方や考え方に気付きた。表から気付いたことを発表した後、グラフに表現したことで27人の生徒が直線のグラフと曲線のグラフで分けられることに着目した。

A子は授業後の感想で、「実験をしながら、授業をしたので、とても分かりやすかったです。グラフなどに表し、結果を出すのが簡単にできてうれしかったです。」と書いた。授業後何が分かりやすかったかを聞いたところ、「どの様に数が増えているかグラフにすると分かりやすい。」と答えていた。また、他の生徒は「グラフはどのように数が動いているか見るのに役だった。」「表の数だけ見ても、同じグループにすることができないのに、グラフにするだけで見分け方が分かりやすくてすごいいいと思いました。」とグラフに表す見方や考え方に気付きた。

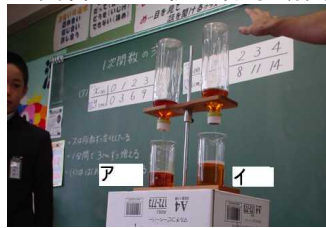
3時間目の授業では「表から式を考えよう。」という本時の目標を示し、水そうに水を入れる具体的な事象で「時間」と「水の深さ」が比例と一次関数の二つの表を提示し授業に入った。「表から気付いたことをあげよう。」と発問したところ表3の視点から表を見ていた。はじめに入っている水の違いに着目できていない生徒が11人いることが分かる。そこで、最初に示した表と具体的な事象を結び付けるた

表3 表からの気づき

はじめの深さの違いに着目した生徒	2人
1分間に入る水の量が同じことだけに着目した生徒	8人
両方に着目した生徒	21人
無答	3人

めに具体的な事象を観察した(資料3)。観察しながら気付いたことを自由に発表させたところ、「はじめイは2cm水が入っている。」「イはアよりいつでも2cm深い。」など発言した。

資料3 生徒の観察場面



その後、表から式を導き出すことに取り組んだ。A子は初めイの式を $y=3x$ と書き考えていたが「いつもアより2cm深いよね。」と助言すると、すぐに $y=3x+2$ の式をつくり、式にいくつかの数を代入して確認していた。B子は、はじめの表からは、1分間に入る水の量だけしか着目できなかったが、観察後ア、イともに式がつくれた。二人とも具体的な事象と結び付いた表から式を導き出せることに気付いた。

次にxが5ずつ増加する表(資料4)から式を考えた。B子は、最初 $y=10x+35$ の式を考えた。しかし、表と一致していないことに気付いた。xが5ずつ変化していることを助言すると、資料

資料4 B子学習プリント

x : おもりの重さ (kg)	y : バネの長さ (cm)
0	35
5	45
10	55
15	65

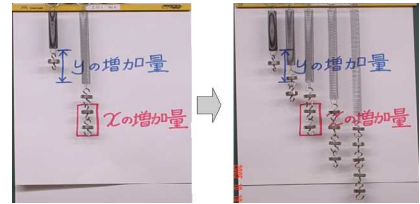
Handwritten notes on the table include: x の増加量 5, y の増加量 10, and the equation $y = 2x + 35$.

4のように表に表す見方や考え方を使いながら、式をつくることができた。この活動を通し、B子は「xがいくつふえたらyがいくつふえるというところが大切だと思った。1kgで何cmのびるというのを考えることで式ができました。」と振り返った。xやyの増加量とその割合に着目しながら、表から式に表す見方や考え方が育ってきたと考え

る。4時間目の授業では、3時間目のバネの長さ(y)とおもりの重さ(x)の式を使って、一次関数の特徴を考えた。まず「xの値が1から3まで増加するときの(yの増加量)/(xの増加量)を考えてみよう。」と問題を提示した。しかし、多くの生徒から「xの増加量って何。」という声が起こった。そこで、資料5の左のバネにおもりをつるす様子を観察した。「xの増加量はどこか。」と発問したところ挙手したのは8名であったことから、ほとんどの生徒はxの増加量を具体的な事象からイメージできていないことが分かった。xの増加量を資料5のように板書した後、「yの増加量は何か。」と

発問したところA子、B子を含めほとんどの生徒が挙手して、「バネの伸びた長さです。」という意見に大きくうなずいていた。具体的な事象から

資料5 バネによる変化の割合



「増加量」の意味理解が深まったと思われる。そこで、xの増加量を自分で決めながら(yの増加量)/(xの増加量)の値を求め気付いたことをまとめたところ、ほとんどの生徒がすべて同じになることを挙げた。しかし、「(yの増加量)/(xの増加量)は何を表しますか。」の発問にすぐに挙手した生徒は少なかった。そこで、分数式に単位を記入したところ挙手が増えた。A子は挙手をして「1kgあたりのバネの伸びた長さ。」と答えた。単位に着目したことで(yの増加量)/(xの増加量)が具体的な事象と結び付いたと考えられる。

この活動後、資料5の右の図で、1kgあたりのバネの伸びを具体的な事象で示したところ「あ、直線になっている。」「いつでも同じだ。」という発言が出た。ある生徒は、ワークシートに「xの値がいくつになってもすべて1kgの時のバネの伸びを表しているのだから一定になっているはず。」と考え方を整理していた。

この活動を通して、A子は「xの増加量とyの増加量の割合を見比べて、その式の意味を確かめることが大切だ。」と振り返った。B子は「xの値がどんなに増えても一次関数の変化の割合は変わらないことが分かった。あとバネが直線になった。」と振り返った。

他の生徒も「実験をしてみても分かるようになった。」「バネの長さがだんだん変わるのを実際に見て、重りをつなげると直線になっていることに驚いた。」など15人が実験や具体物で考えたことが役立ったことに触れた。また、式や変化の特徴をつかむのに変化の割合に着目することが大切だと27人が振り返った。この活動を通して変化の割合に着目する見方や考え方に気付いていった。

以上のことから、具体的な事象と結び付いたいくつかの表からグラフをつくったり、変化の割合に着目し式をつくったりする活動は、関数的な見方や考え方に気付くための手だてとして有効であったと考える。

3 深める過程において、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目し、関数的な見方や考え方を活用し問題解決する活動は、関数的な見方や考え方のよさを味わうための手だてとして有効であったか

11時間目の授業では、一辺2cmの正方形を1cm²ずつの重なりで斜めに重ねていく図(p.163単元指導計画参照)を具体的な事象として提示した。重ねる枚数に伴って変化する数量を一人一人見付け、100枚重なったときのその数量を求めた。

重ねる枚数に伴って「全体の面積」が変わることに気付

いた生徒が多かった。そのため、「全体の面積」について解決の方法

表4 見付けた数量と問題解決した人数

周の長さ	20人	横の長さ	1人
重なる面積	18人	重なる枚数	2人
重ならない面積	21人	全体の角度	1人
重なった周の長さ	6人	全体の辺の数	1人
重ならない周の長さ	2人	白い紙の面積	1人
全体の枚数	3人	(追究できない数量)	
重ならない頂点の数	6人	対角線の長さ	1人
重なる頂点の数	1人	その他	1人
縦の長さ(高さ)できるまでの数	3人		
	1人		

を考えた。生徒からの「表や式で考える」という考え方を基に「全体の面積」については全体で問題解決した。その後一人一人が変化する数量を見付け問題解決をした(表4)。予想以上にいろいろな数量を見付けだすことができた。32人が二つ以上問題解決し、その内8人が四つ以上問題解決することができた。

A子は「重なっていない面積」に着目したが、1枚重ねた図だけ見ていたため表に表現できなかった。2枚重ねた図を隣にかいて見せたところすぐ表に値をかき込むことができた。式に表現するところでは友達に相談していたが、できた式に100を代入するところはずぐにできた。

B子はなかなか自分から重ねる枚数に伴って変化する数量を見付けられなかったが、一つ重ねた図で「数を使って表せるものは」と問いかけると、「周りの長さ」とすぐ答えた。二つ重ねた図をかきながら周の長さが変わること気付くと「あ、そうか。」とつぶやき、表と式を使って問題解決し、その他にも二つの数量を見付けて問題解決できた。B子は振り返りで「いろいろな考えでyを考えるのがおもしろかった。計算もとても簡単だったのでいろいろなことが考えられました。」と表や式に表す見方や考え方に抵抗感はなくなり、この活動を楽しんでいる様子がうかがえた。

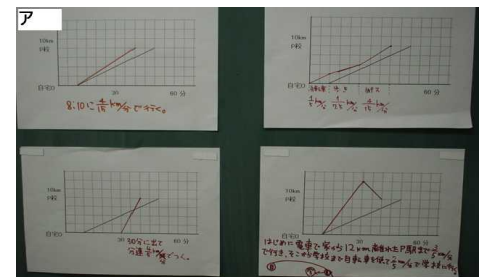
また、みんなで見付けた問題を発表し合ったことで他の生徒も「自分では見付けられない式もあ

ったので楽しかった。」「こんなにたくさんの式をつくることのできるなんてびっくりした。もっとあると思うので、考えてみたい。」など式に表す見方や考え方に着目し友達の見方や考え方に興味をもてたことが分かった。

12時間目の授業では、時間と道のりを具体的な事象とし、グラフを活用して問題解決する活動を設定した(p.164単元指導計画参照)。問題の概略はM君が学校に遅刻をしたときの様子(一次関数)をグラフからよみとり、遅刻しない方法をグラフを利用し考え、その方法を速さと時間に着目し説明する問題である。最初、時間と道のりと聞いて難しそうに感じていた生徒も、グラフの傾きが速さを表すことに気付くことで、いろいろな方法で問題解決することができた。(資料6)。

A子は資料6のアを考えた。「8時10分に4/15(km/分)で行く。」とみんなの前で説明

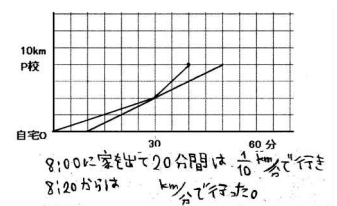
資料6 発表し合った考え方



できた。式に表現することにはまだ抵抗のあるA子であるが、グラフの表現から変化の割合に着目する見方や考え方を使って、自分の考えを説明することができた。

B子は資料7を考えた。速さとグラフの傾きを結び付けている。授業後の感想でも「グラフからいろいろなことをよみ

資料7 B子の考え方

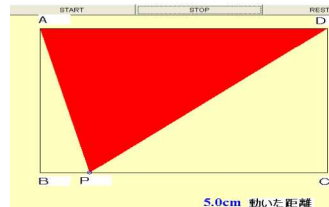


とってグラフから速さがわかるんだなあと思いました。」とグラフに表す見方や考え方を活用するよさや変化の割合に着目する見方や考え方がいろいろな事象に活用できるよさを実感していた。

この授業後の生徒全員の感想から主な部分を抜き出してまとめたところ、「グラフを使って考えるのが楽しかった。(15名)」「いろいろな方法が考えられたから楽しかった。(12名)」と具体的な事象とグラフを結び付けて考えることに興味を示してきたことがうかがえた。この活動から、グラフに表す見方や考え方を活用し、自分の考えを表現していくことの楽しさを実感していた。

16時間目の授業では点が長方形の三つの辺上を動く動点の問題を取り上げた（p.164単元指導計画参照）。問題が具体的に把握できるようにコンピュータを使ったシミュレーションを行った（資料8）。生徒のグラフに対する関心が高まってきたので、「点の移動した距離と三角形の面積の関係を表すグラフの形を予想しよう。」と投げかけ、まずは変化の様子を大まかなグラフの形でとらえた。この段階で、ほぼ全員の生徒が台形の形のグラフをイメージでき、A子もB子もすぐに大まかなグラフの形がかけた。これは、具体的な事象の変化の様子をシミュレーションで見たことで、面積の変化の様子をとらえることができたことを表している。

資料8 動点シミュレーション
三角形の面積の変化を調べよう

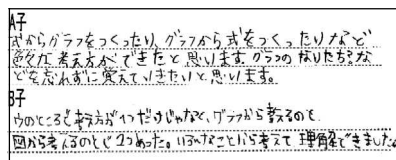


授業では、点PがCD上にあるときを一人一人の考え方で追究した。A子はグラフに表す見方や考え方を使い、 $y = -3x$ と考えていた。変化の割合とグラフの傾きは結び付いている。B子もグラフに表す見方や考え方を使い式を求めていた。はじめ、グラフを $y = -3x + 12$ としたが切片の意味を振り返ることで、 $y = -3x + 42$ の正しい式が導けた。

多くの生徒がグラフに表す見方や考え方を活用し、変化の様子をとらえ、そこから式を考えたと、図から直接式に表す見方や考え方を活用した生徒が5名ほどいた。この両方の考え方を発表し合ったところ、式が一致したことに多くの生徒が関心をもった。自分と違う友達の考え方を聞いて、「～君の考え方はすごい。」と感じていた。

この授業後のA子とB子の感想が資料9であり、グラフや式に表す見方や考え方が結び付いてきたことが分かる。また、他の生徒も「グラフなど使って予想を立てることが大切だ。」「式が分からなかったらグラフで考えたり、両方を利用し考えるようにしたい。」など、関数的な見方や考え方が深まっているのが分かった。

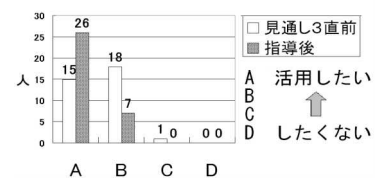
資料9 A子とB子の振り返り



見通し3の前と後で「一次関数をいろいろな問題解決に活用したいですか。」と意識調査をしたところ、活用したいという意欲が高まってきてい

ることが分かった（資料10）。これは関数的な見方や考え方のよさを生徒が味わった結果高まったと考えられる。

資料10 意識調査



単元を通した感想でA子は「一

次関数は難しかったけど実験などして、すごく分かりやすかった。数学が嫌いだったけど、好きになれました。」B子は「実験やパソコンで考えたことで、いろいろな考えをもつことができました。」と書いた。

以上のことから、具体的な事象と表やグラフや式の結び付きに着目し、関数的な見方や考え方を活用して問題解決したことは、関数的な見方や考え方のよさを味わうための手だてとして有効であったと考える。

研究のまとめと今後の課題

関数領域において、実験や観察など具体的な事象から変化をよみとる活動は、生徒にとって興味をもてる活動であった。また、この活動を通して培った見方や考え方は、具体的な事象の問題解決を通して、考えることの楽しさにつながる実践から明らかになった。

具体的な事象を通して、学習していることの意味を深く理解していくことが分かった。しかし、生徒が身近に感じていない事象になると、考え方をうまく活用できない生徒が見受けられた。さらに、教師は、生徒が考え方を活用するための視点を明らかにし、指導の工夫をすることが大切であると感じた。

今後他の領域でも、単元を通して培う大切な数学的な見方や考え方を明らかにし、一人一人の生徒が課題を具体的に把握し表現することで、数学的な見方や考え方に気付き、そのよさを味わう指導の工夫を研究していきたい。

<参考文献>

- ・片桐 重男 著 『数学的な考え方の具体化と指導』 明治図書(2004)
- ・中原 忠男 著 『算数・数学における構成的アプローチの研究』 聖文新社(1995)

(担当指導主事 角田 忠雄)