

平成21年度 特別研修 研究報告書

高校数学における学習の意義を実感させ、関心・意欲を高める指導の工夫
－日常生活に応用できる数学事例集の作成と活用を通して－

教育情報推進係

岩崎 晶典（高等学校教諭）

金谷 恵子（高等学校教諭）

I テーマ設定の理由

OECD生徒の学習到達度調査（PISA2006）の結果では、数学的リテラシーの平均得点が2003年より低下した。中でも、グラフ・表の読み取りからの立式および課題解決を求める分野での無解答が目立つなど、数学で学習したことを実生活で十分に生かしてない現状が露呈し、知識・技能を実際の場面で活用する力に課題があることが明らかになった。さらに、科学への興味・関心が低いという調査結果も出ており、自然科学そのものを学ぶことの意義を感じられない生徒の存在が改めて浮き彫りになった。勤務校の生徒においても、課題へ取り組む姿勢や授業に参加する態度などから、数学に対する関心・意欲が低いと感じられる。

その原因の一つとして、日常生活における数学の活用例が教科書にはほとんど載っていないことが考えられる。さらに、授業の中で、その活用例にふれる場面が少なくなっていることも挙げられる。つまり、生徒は数学とは非日常的なものであると考えており、日常生活とのつながりを意識する場面がほとんどないのである。これらの原因により、生徒の数学に対する関心・意欲が十分に高まらず、結果として、活用する力に欠ける傾向にあるのではないかと考えた。

新学習指導要領では、「学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること」と唱われており、数学的活動を通して数学を学習する意義を実感できる指導がより一層求められている。また、OECD生徒の学習到達度調査（PISA2006）の結果から、数学を用いて社会問題を解決することに課題があると分析でき、知識や技能を実際の場面で活用する能力が求められている。

これらを踏まえ、数学と日常生活とのかかわりを生徒に意識させる事例集を作成し活用することで、学習することの意義を実感させる方策を考えた。数学学習の意義が実感でき、関心・意欲が高まることにより、数学の応用問題にも積極的に取り組めるようになるであろう。さらには自ら課題を見だし、数学を積極的に活用する態度の育成につながるものとする。

そこで、本研究では、数学を活用する力と探求心の育成も視野に入れつつ、高校数学における学習の意義を実感させ、関心・意欲を高める指導の工夫を主題とした。

II 研究のねらいと課題解決策

日常生活に応用できる数学事例集を作成し活用することが、学習の意義を実感させ、関心・意欲を高めることに有効であることを、授業実践を通して明らかにする。授業において様々な事例を知り考察することを通して、生徒が数学と日常生活とのつながりを意識し、数学の学習意義を実感できると考える。具体的には、各単元における数学と日常生活とのかかわりについて調べ、それらを事例集としてまとめる。その事例集を以下の場面で活用した授業実践を行う。

- ・ 各単元の導入部分において、学習の動機付けを行う場面。
- ・ 各単元において、既習事項を応用させ、課題を探求する活動につなげる場面。

また、生徒の数学に対する関心・意欲の高さやその変化を知るためのアンケートを定期的に実施し、実践内容と生徒の関心・意欲との関連について検証する。

Ⅲ 課題解決のための具体的実践

1 「事例集」の概要

高校数学の教科書には数学の活用例がほとんど載っていない。また、事例が掲載されている市販の本においては、「この本には、“場合の数”の事例がたくさん載っているが、“対数関数”の事例が載っていない」など、掲載分野の偏りがある。そのため、高校の教員が各単元で扱える事例を探すために多くの時間を費やさなければならないという現状がある。

このことを踏まえ、本研究では、“高校の教員が授業で活用しやすいものに”ということを中心とし、数学Ⅰ～Ⅲおよび数学A～Cの各単元の内容を網羅した事例集の作成を行った。事例の数は20程度とし、各事例あたりA4サイズ1～2ページでまとめた。

具体的には、次のような構成で事例集を作成した。

- ① 日常生活における数学の活用例を紹介する
- ② 数式および図を提示して説明し、高校数学と日常生活とのつながりを意識させる
- ③ その事例と関係している他の例や、高校数学の演習につながる応用問題を提示する

例1：数学Ⅱ「指数関数・対数関数」

- ① 新聞紙を折りたたんだ厚みと指数関数・対数関数との関係
- ② 新聞を50回折ると、その厚みは 2^{50} 倍になり、対数関数を用いて実際の厚みを求めることができる
- ③ 2^{50} の一の位の求め方（一の位は循環）、 2^{50} の概数の計算

例2：数学Ⅲ「積分法」


- ① ドーナツの体積と定積分の関係
- ② ドーナツの断面積とその中心が描く円の円周から、定積分を用いてドーナツの体積を求めることができる

例1

単元名：指数関数・対数関数

新聞を折るだけで宇宙旅行へ行ける？！

新聞紙を半分に折りたたむことを繰り返すと、新聞紙の厚さは0.1mmとすると、50回折ったときの厚みはどれくらいでしょうか？
 答えは「およそ1億1300万km」で、これはなんと地球と火星を往復できる距離なのです！（地球と火星が最も近いときの距離は55000万km）
 実際には折れなくても、夢の世界で宇宙旅行ができるなんて、素敵ではありませんか？！



<解説>
 0.1×2^{50} mm を計算し、単位を整理すると、およそ1億1300万km という距離になります。これを正確に計算するのは大変なので、およその値を求める手段として、いくつかの計算方法を紹介します。

①桁数から 2^{50} のおよその値を推定する
 $\lg 2^{50} = 50 \lg 2$
 $= 50 \times 0.3010$
 $= 15.0500$

14桁 [10¹⁴に近いか]
 これより、 0.1×2^{50} mm \approx 1億km ということがわかります。

②桁数に加えて小数位の数（桁数の2桁までわかる）からさらに絞り込む
 $\lg 2^{50} = 15.0500$
 $= 15 + 0.0500$
 $\lg 1.12 < 0.0500 < \lg 1.13$ より 【※本用計算機より】
 $2^{50} = 10^{15} \times 10^{0.0500}$
 $= 10^{15} \times 1.12 \dots$

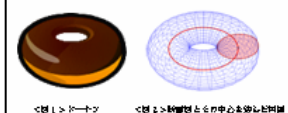
これより、 0.1×2^{50} mm \approx 1億1000万km ということがわかります。

例2

単元名：積分法

ドーナツの体積を求めよう！！

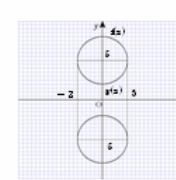
ドーナツが図1の半径 r の円周 V を求めてみよう。（トラスチアの半径）
 <図2>のように、断面積 $A(x)$ を求め、断面図の中心が描く円周の長さ L を掛けると体積が求まります。
 $V = L \cdot A(x)$
 これを積分で求めようとする... <図3>
 $V = \int_{-r}^r \{A(x) - A'(x)\} dx$



<図1> ドーナツ <図2> 断面図とその中心が描く円周

実際に計算してみよう！！

断面図(円)の半径を r 、断面図の中心が描く円(円)の半径を x とすると...
 $A(x) = \pi(r^2 - x^2)$
 $L = 2\pi r$
 $V = \int_{-r}^r \{ \pi(r^2 - x^2) - \pi(-2x) \} dx = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$



上の円の方程式は
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9 \dots \text{①}$
 ①を x 軸を中心として回転させると...
 ①と②と同じトラスチアになります！！
 ①を整理すると... $x = \pm\sqrt{9-y^2}$
 つまり、 $A(x) = \pi(9 + \sqrt{9-y^2})$
 <図2> ドーナツの円周長
 $L = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ とする。
 よってその体積 V は
 $V = \int_{-3}^3 \{ \pi(9 + \sqrt{9-y^2}) - \pi(-2y) \} dy = 6\pi r^3$
 体積が同じ値になります！！

その他の事例 (一部)

数学Ⅰ	「賢い買い物をしよう！！」
数学Ⅱ	「携帯電話でハートを送ろう！！」
数学Ⅲ	「ドーナツの体積を求めよう！！」

数学A	「ウキウキセットの選び方は何通り？！」
数学B	「ゲームキャラクターの動きの秘密！！」
数学C	「サイクリングでサイクロイド？！」

2 事例集の活用

活用例① 数列の導入における意識付け 第2学年 数学B「数列」における授業実践

数列は、日常生活のあらゆる場面で活用されており、単元の導入においてその事例を紹介することが生徒の学習意欲を高めることにつながると考えられる。そこで、下のような例を扱うことにより、生徒に日常生活とのつながりを意識させ、数学の学習意義を実感させる。

活用事例：「夢のある数列の話?！」

- 10月の木曜日の数列
1, 8, 15, 22, 29
- 1年後に金額が2倍になる銀行に1万円預けたら10年後にはいくらになる?
1, 2, 4, 8, 16, ..., 512, 1024
- ガウスの“和”の計算の話
ガウスは10歳の時に1から100までの和を一瞬にして計算することができ先生を驚かせた。
- ピラミッド(正四角錐)に使われる石の総数
1(1段目), 4(2段目), 9(3段目), 16(4段目), ...
 $1+4+9+16+\dots=?$

単元名：数列

夢のある数列の話?!

「今日は29日木曜日ですが、2週間前の木曜日は何日でしたか?」
カレンジャーは、日常生活における数列の例として、よく挙げられます。
「もしも貯金が1年間で2倍に増えたら、10年後にはいくらになりますか?」
「そのお金で何を買いますか?」
これは、非日常的ではありませんが、夢のある話ですね。
我々の世界では機械計算でも、我々の世界では算算するの自由です。
「2年後は4万円、3年後は8万円、5万円、10年後は...1024万円!」
カレンジャーは驚いて息を呑んで考えた後は、「もしも...」という話で数列を話してみませんか?!

日	月	火	水	木	金	土
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

<解説>
①「カレンジャー」
今日が29日(木)だとしましょう。先週の初曜日は22日ですね。調べて考えると、今日の朝1週の初曜日は1日です。5週目の日には1週目の日にちにして4倍することになります。
初項1、公差の等差数列の和の公式は「 $S_n = n \times (1 + (n-1) \times d)$ 」
②「貯金」
2009年4月、貯金が1年ごとに倍になる銀行に、1万円を預けたとします。
2010年(2年目)には2万円、2011年(3年目)には4万円、そして2019年(10年目)には1万円×2⁹=1024万円になります!!
初項1、公差の等差数列の和の公式は「 $S_n = n \times (1 + (n-1) \times d)$ 」

活用例② チェバの定理とつり合いの関係 第3学年「数学探究」における授業実践

チェバの定理の公式は、参考書などにはその証明が掲載されているが、日常生活とのつながりが見えにくい。公式を使って問題を解くことはできるが、その公式の意味を理解していない生徒が多い。そこで、様々な場面で使われている「つり合い」の関係をを用いてチェバの定理を説明し、日常生活とのつながりを意識させる。

まず、バランス棒(図1)を用いて、つり合いの関係について生徒に考えさせる。

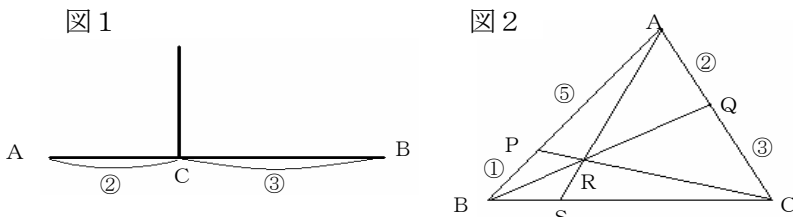
AC:CB=2:3だから、点Cを支点として平衡状態にするためには、A=3g、B=2gの重りをつり下げればよい。

次に、つり合いの関係を平面図形に 응용させる。

線分AB、ACにおいて、点P、Qを支点として平衡状態にするためには、A=3g、B=15g、C=2gの重りをつり下げればよい。

従って、BS:SC=2:15、AR:RS=17:3となる。(図2)

点Rを支点として三角形を平衡状態にできることを、実際に模型を用いて説明した。



単元名：平面図形

不思議な図形の世界!!

チェバ・メネラウスの定理は名前くらいは知っているが、定理自体はなかなか理解するのが大変です...
高校中入試から大学入試まで、ずっと役立つ定理であるにもかかわらず、なかなか覚えられなかったり、覚えたら忘れてしまったり、不思議な図形の世界へご案内します!!

【棒の支点と重心】
左の図を真下向き、棒の両端A、Bに、重さがそれぞれm、nの重りをつり下げます。(重さのみかかれば重心と見做すことができます。B、Dが重心と見做すことができます。このとき、重心はA、Bの重心の重心になります。)
= (重心Aから重心Dまでの距離) × (重心Bから重心Dまでの距離)
すなわち m × (AからDまでの距離) = n × (BからDまでの距離)
このとき、重心Dの位置をDと見做すとき、重心はm:nが分かっています。

【三角形の重心と重心(3箇所の重心)】
次に、上の図を真下向きと見做して三角形を考えてみましょう。3つの重心A、B、Cに、それぞれ重さ1、m、nの重りをつり下げるとします。このとき、2つの重心A、Bの重心は重心Dになります。また、点Dと残りの重心Cとの重心をEとします。今度は棒DEについて
(1+m) × (DからEまでの距離) = n × (CからEまでの距離)
が成り立つようにDを移動させます。EはDと重なって三角形の重心になります。角が一致します。
ここで、重心1+m+nの重心Dと見做すとき、3箇所の重心A、B、Cの重心と見做すことができます。ここまではよろしいでしょうか? それでは、いよいよ驚きのチェバ・メネラウスの定理へご案内します!!

チェバの定理

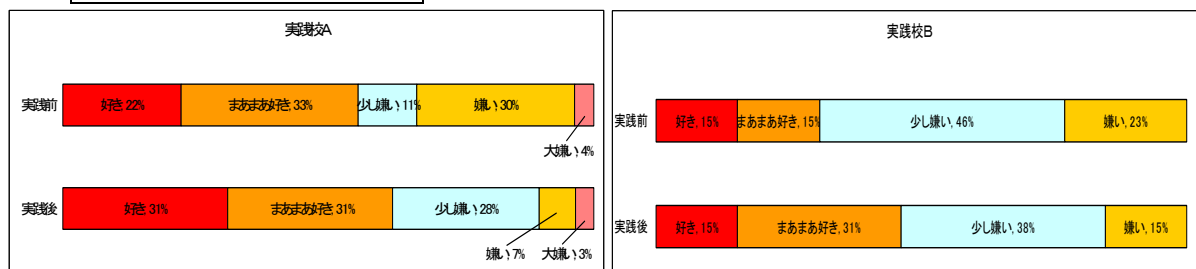
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

IV 研究の成果と課題

1 成果

研究当初における、生徒の数学に対する意識調査のアンケート結果を下記に示す。

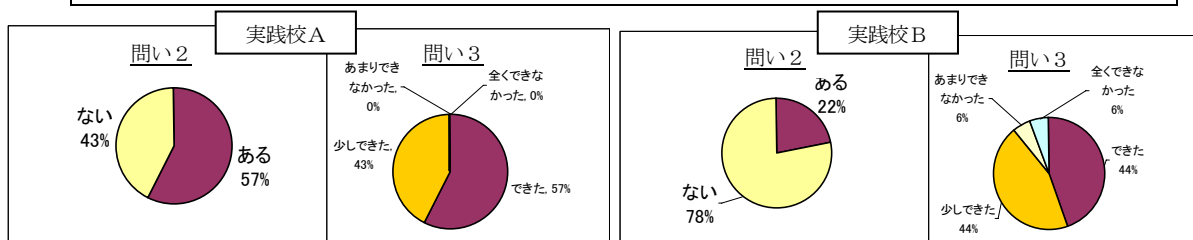
問い1：数学は好きですか？（研究実施前後の比較）



年度当初と比べて「好き」「まあまあ好き」の生徒が増え、その中でも「好き」と答えた生徒の割合が増加（実践校A）した。また、「嫌い」と答えた生徒の割合は両校とも大幅に減少した。

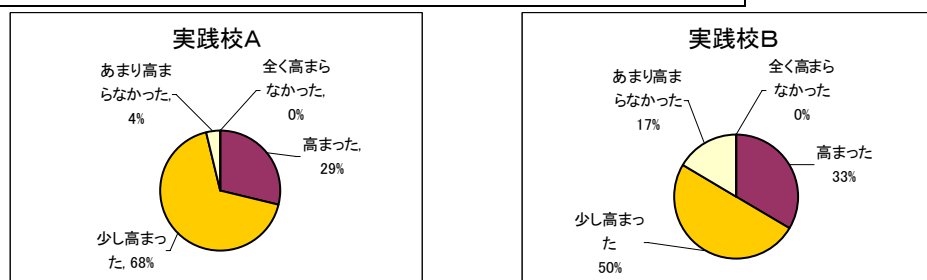
問い2：今までに、数学と日常生活とのつながりを意識したことはありますか？（実践前）

問い3：今回の授業を通して、数学と日常生活とのつながりを意識できましたか？（実践後）



年度当初のアンケートでは「日常生活と関わりがない」などの記入がみられたが、授業実践後の『勉強になったこと』の問いに対しては「数学が日常生活に関係している」と記入されているなど、事例集の活用が数学と日常生活とのつながりを意識させることに有効であることが分かった。

問い4：今回の授業を通して、数学の学習意欲は高まりましたか？

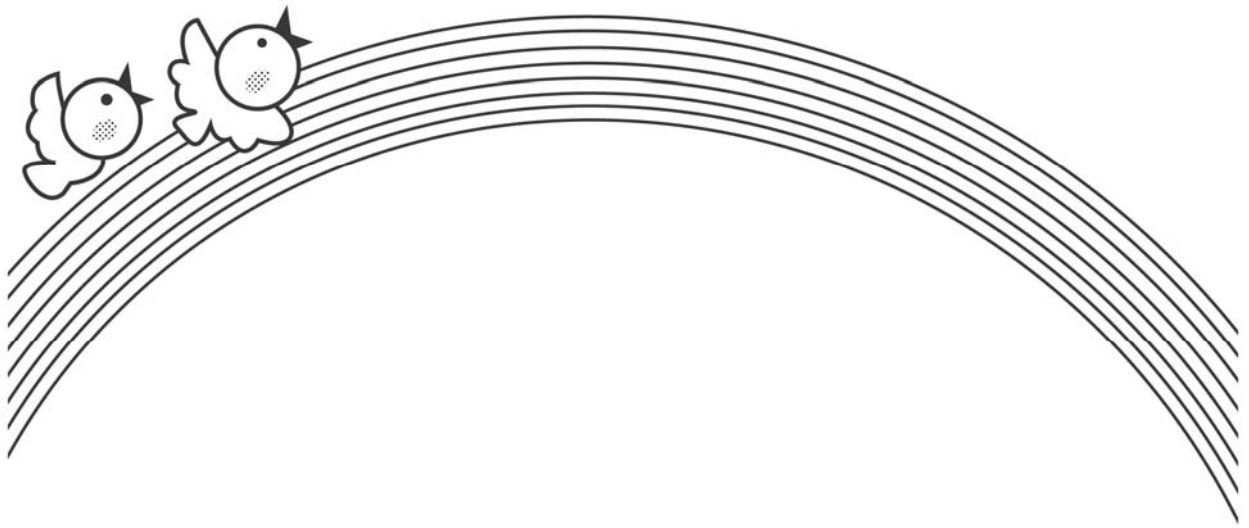


上記の結果より、事例集を活用した授業を通して、生徒は数学と日常生活とのつながりを意識することができ、数学の学習意欲が高まったと考えられる。

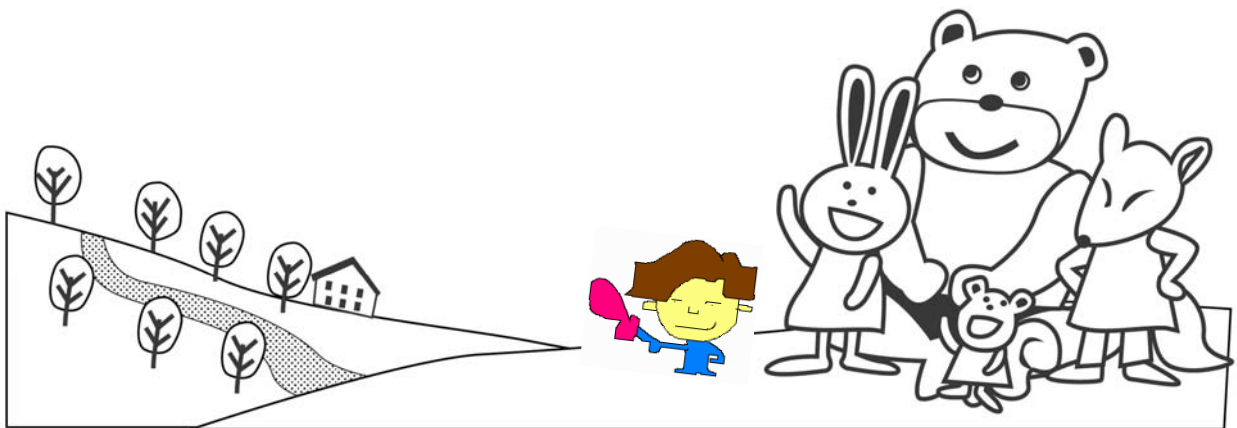
これらのことから、日常生活に応用できる数学事例集を作成し活用することが、生徒の学習意義の実感や関心・意欲の向上に有効であることが分かった。

2 課題

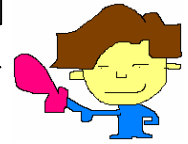
本研究では、今回作成し活用した事例集が、数学を積極的に活用する態度や「習得⇔活用⇔探求」によって学力を向上させる姿勢につながっているかどうかの検証はできていない。今後は、それらの力の育成に効果的な事例集の活用方法について、生徒の変化を継続的に評価しながら検討していく必要があると考える。



日常生活に応用できる 「数学事例集」



目 次



2次関数	「パラボラアンテナを数学しよう！！」	・・・ 1
2次関数、微分法	「賢いお買い物をしよう！！」	・・・ 2
高次方程式	「2次も3次も同じ公式！？」	・・・ 4
方程式と不等式	「素数は何人兄弟？」	・・・ 6
三角比	「できるだけ遠くまでボールを投げよう！！」	・・・ 8
三角比	「登山で上った道のりを求めよう！！」	・・・ 9
三角関数	「携帯電話でハートを送ろう！！」	・・・ 10
三角関数、媒介変数表示	「サイクリングでサイクロイド！？」	・・・ 11
指数関数・対数関数	「新聞を折るだけで宇宙旅行へ行ける！？」	・・・ 12
指数関数・対数関数	「マグニチュードはエネルギーの対数！？」	・・・ 14
微分法・積分法	「最速ピッチャーのボールは何m上がるか？」	・・・ 15
積分法	「ドーナツの体積を求めよう！！」	・・・ 16
場合の数	「ちょっと使えるお買い得知識！！」	・・・ 17
場合の数・確率	「ウキウキセットの選び方は何通り！？」	・・・ 18
確率	「初志貫徹は損！？」	・・・ 19
平面図形	「不思議な図形の世界！！」	・・・ 20
平面図形、式と証明	「2数の和・差を直径にもつ円の有用性」	・・・ 22
数列	「これであなたも芸術家・建築家になれる？」	・・・ 24
数列	「3乗の和は1乗の和の2乗！？」	・・・ 26
数列	「夢のある数列の話！？」	・・・ 28
ベクトル	「ベクトルの「内積」って何！？」	・・・ 29
ベクトル、1次変換	「ゲームキャラクターの動きの秘密！！」	・・・ 30

単元名：2次関数

パラボラアンテナを数学しよう！！

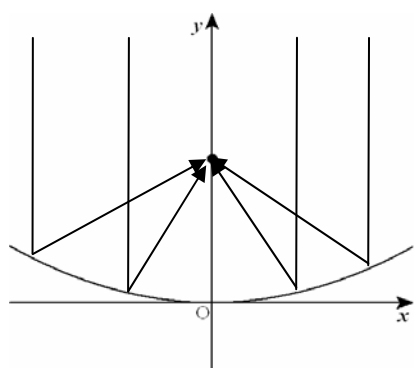


焦点と準線からの距離が等しい点の集まりが放物線です。

例えば、放物線の内側に準線に対して鉛直方向から光が当たると、その光は焦点に集まります<図1>。

この性質を利用したものに、パラボラアンテナ<図2>があります。

パラボラアンテナの曲線は、放物線になっており、効率よく電波をキャッチできるのです。



<図1> 放物線に反射した光は一点に集まる



<図2> パラボラアンテナ

<解説>

焦点の座標を $A(0, a)$ 、準線の方程式を $y = -a$ とする。 $(a \neq 0)$

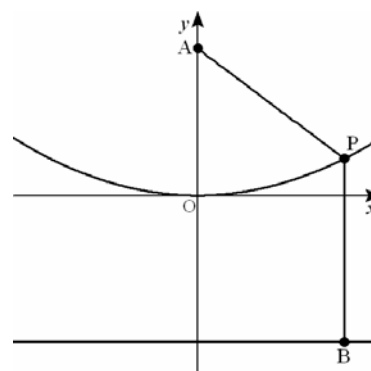
焦点と準線からの距離が等しい点を $P(x, y)$ とし、点 P から準線に下ろした垂線の足を B とする。

$AP = BP$ から

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y - (-a)|$$

両辺を2乗して整理すると、 $y = \frac{1}{4a}x^2$

放物線になりましたね！！



<問題>

焦点の座標を $P(p, 0)$ 、準線の方程式を $x = -p$ ($p \neq 0$) としたとき、この焦点と準線から等しい距離にある点の描く方程式を求めよ。

(正解) $y^2 = 4px$

単元名：2次関数、微分法

賢いお買い物をしよう！！



今、疲れているうえにお腹が空いていて、どうしてもケーキが食べたいとします。このとき、1個目に食べるケーキの価値はとても大きいはずですが、しかし、2個目、3個目・・・と増えるにしたがって、その“1個”あたりの価値は下がっていきます。つまり、このしくみを追究すれば、同じ予算でも満足度の高い買い物ができるようになるということです！



これももう飽きてきたなあ。

先に書いたように、一般には人が手に入れる商品数の増加に伴い、満足度は減少していきます（※1）。経済学では、このような“商品を買って得られる満足度”を「効用」、「商品が1つ増えたときの満足度」を「限界効用」といい、先ほどの※1のようなことを「限界効用逓減（ていげん）の法則」といいます。

2つの商品AとBを購入するときの例を考えましょう。いま、Aを3個、Bを12個購入したとします。また、これと同じだけの効用（満足度）が得られる2つの商品A、Bの組み合わせは下の表のようになります。（同じ満足度の組み合わせを集めると、なめらかな「無差別曲線」ができます。）

組合せ番号	商品A（個）	商品B（個）
①	3	12
②	4	9
③	6	6
④	9	4
⑤	12	3

<問 題>

Aが100円、Bが50円、予算が1000円であったとします。このとき、満足度が最も高くなる購入の組合せを考えましょう。

<解 説>

商品Aを x 個、商品Bを y 個とする。予算制約は “ $100x + 50y = 1000$ ” …… ①
この中で満足度を最も高めることができるのは、この直線①に無差別曲線が接する場合であるといえます。

簡単のため、無差別曲線の式を

$$xy = k \dots\dots ②$$

とすると、①、②より

$$x(-2x + 20) = k$$

$$\therefore 2x^2 - 20x + k = 0 \dots\dots ③$$

③の判別式を D とおくと、①、②が接することより、

$$D/4 = 100 - 2k = 0$$

$$\therefore k = 50$$

これと①、②より

$$x = 5, y = 10$$

したがって、1000円の予算では「Aを5個、Bを10個」購入する場合は、満足度を最も高める購入方法であったといえます。



単元名：高次方程式

2次も3次も同じ公式！？



次のような問題を考えてみよう！！

横22cm、縦15cmである長方形のブリキ板がある。この四隅から、1辺が x cmの正方形を切り取り直方体の容器を作ると、容積が 300cm^3 になった。 x の値を求めよ。ただし、 x は整数とする。

<解答>

直方体底面の横の長さは $22 - 2x$

縦の長さは $15 - 2x$

容積が300だから、

$$x(22 - 2x)(15 - 2x) = 300$$

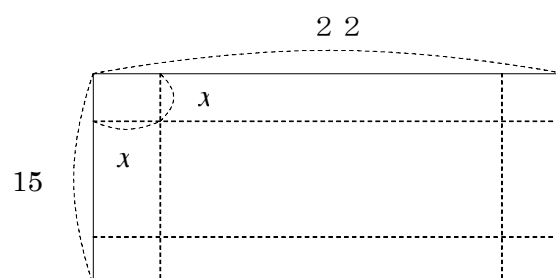
展開して整理すると・・・

$$2x^3 - 37x^2 + 165x - 150 = 0$$

$$x \text{ について解くと } \dots x = 5, \frac{27 \pm \sqrt{489}}{4}$$

x は整数解より、 $x=5$

ここまでは教科書レベルの3次方程式の問題です。



2次方程式の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

さて、2次方程式の解の公式を知っていますね？

3次方程式にも2次方程式と同じように解の公式があるのです。

それを紹介します！！

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ において、 $x + \frac{a}{3} = y$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \end{aligned}$$

となって、2乗(y^2)の項が消えます。

ゆえに、全ての3次方程式は $x^3 + px - q = 0$ ($x^3 + px = q$) という形で表せます。

それでは $x^3 + px = q$ について公式を求めてみましょう。

$x^3 + px = q$ について、 $x = u + v$ とおくと

$$\begin{aligned}x^3 + px &= (u + v)^3 + p(u + v) \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) \text{ より、}\end{aligned}$$

$x^3 + px = q$ は $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = q$ という形で表せます！！

したがって、 $u^3 + v^3 = q$, $3uv = -p$ となるように u, v を定めれば、

$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ だから、2次方程式の解と係数の関係より u^3, v^3 は、

2次方程式 $t^2 - qt - \frac{p^3}{27} = 0 \cdots \textcircled{1}$ の2つの解であることとなります。

①の解を α, β とすると、 $u^3 = \alpha, v^3 = \beta$ となり、それぞれの方程式を解くことにより u, v を求めることができる。

そして、 $x = u + v$ より、 $x = (\alpha \text{ の } 3 \text{ 乗根}) + (\beta \text{ の } 3 \text{ 乗根})$ となります。

どうです??

3次方程式も2次方程式の解の公式を用いて解くことができるのです。
面白いですね！！



<問 題> 次の3次方程式を解きなさい。

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

<解 説>

$x + \frac{-3}{3} = y$ すなわち $x = y + 1 \cdots \textcircled{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - (y + 1) + 3 \\ &= y^3 - 4y\end{aligned}$$

$y^3 - 4y = 0$ を解いて y の値が求まります。 x の値は②より求まります。

(正解) $x = \pm 1, 3$

素数は何人兄弟？



素数は、1 とその数自身以外に正の約数がない、1 より大きな自然数のことですね。小さい方から並べると2, 3, 5, 7, 11, 13, 17・・・です。現在でも、最大の素数探しにスーパーコンピュータが使われ、ものすごく大きな桁数の素数が次々と見つかっています。なぜ大きな素数が重要かという、データの暗号化に必要なんです！！

さて、この素数に兄弟がいたことを知ってましたか？紹介しましょう。
まずは、『**双子素数**』です。

双子

双子素数とは、差が2の2つの素数の組のことです！！



双子素数の例としては、3 と 5, 11 と 13 などがあります。

この双子素数は、無限に存在するだろうと予想されています。

続いて、『**三つ子素数**』です。

三つ子素数とは、 $\{n, n+2, n+6\}$ または $\{n, n+4, n+6\}$ の形をした、素数3つの組のことです！！

三つ子



三つ子素数は双子素数を含みます。

三つ子素数を「 $\{p, p+2, p+4\}$ の形をした素数三つの組」と定義しないのは、その中に必ず3の倍数を含んでしまうからなんです！！

三つ子素数を小さな方から並べると、

(5, 7, 11), (7, 11, 13), (11, 13, 17), (17, 19, 23), …

この三つ子素数も無数に存在すると予想されています。

そして、三つ子ときたら・・・そう『**四つ子素数**』です。

**四つ子素数とは、 $\{n, n+2, n+6, n+8\}$ がすべて素数であるような数の組をいいます。
(n と $n+2$ の組および $n+6$ と $n+8$ の組はいずれも双子素数です！！)**


四つ子



最小の四つ子素数は (5, 7, 11, 13)、次は (11, 13, 17, 19) と続いていきます。この四つ子素数は無限にあるのかどうかは現在分かっていません。

さらに、四つ子素数の逆数の総和は収束し、

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{107} + \frac{1}{109}\right) + \dots = 0.8705883800\dots$$

となることが知られています。不思議ですね！！ 

<問 題>

四つ子素数で、(101, 103, 107, 109) の次に来る組み合わせを見つけてみよう！！

〔 ヒント：四つ子素数は最小の組み合わせを除き、 n を 0 以上の整数として、
 $\{30n+11, 30n+13, 30n+17, 30n+19\}$ の形で表せるよ！！ 〕

(正解) (191, 193, 197, 199)

単元名：三角比

できるだけ遠くまでボールを投げよう！！



体育のスポーツテストでハンドボール投げという種目があります。
どうしたら、遠くまでボールを飛ばせるか、みなさんも一度は考えた
ことがあると思います。



同じ力で投げても、距離に違いが出てきます。知ってましたか？
投げる角度を変えると、飛距離に違いが出てくることは想像に難しくありま
せんよね？

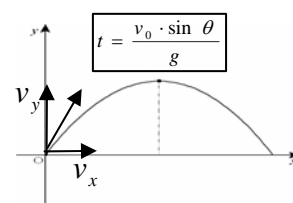
「じゃあ、角度をどれくらいにしたら、ボールが一番遠くに飛ぶのかな？」
「だいたい・・・45° くらいかな？」とほとんどの人が考えると思います。
検証してみましょう。

<検 証>

ボールの初速度を v_0 、地面とのなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)、重力加速度を g とし、

初速度 v_0 を x 軸成分、 y 軸成分に分解した速度を v_x, v_y とする。

$$v_x = v_0 \cdot \cos \theta, v_y = v_0 \cdot \sin \theta - gt \quad (t \text{ は時間})$$



ボールの高さが最高になるときは、 $v_y = 0$ になるときだから、

$$v_y = 0 \text{ を解いて、} t = \frac{v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

鉛直方向の速度が0になったとき

すなわち、ボールを投げてから地面に着くまでの時間は $\frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$ ということになる。

このとき、水平方向に進む距離 $v_x \cdot t$ を求めると、

$$v_0 \cdot \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

距離 = 速度 × 時間

ということは・・・この $\sin 2\theta$ の値が最大になるような θ を求めればよい。

よって $\sin 2\theta = 1$ すなわち $2\theta = 90^\circ$ ($\because 0^\circ < \theta < 90^\circ$)

$$\theta = 45^\circ$$

となるわけです。予想通りでしたね！！

でも、実際には空気抵抗などもあるので、計算通りにはうまく行きません。
また、水平方向に進む距離は、初速度の2乗に比例することがわかります！！



単元名：三角比

登山で登った道のりを求めよう！！



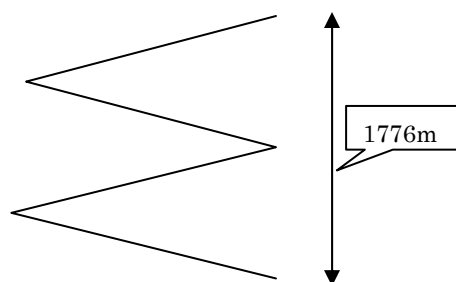
富士山は5合目まで車で登り、そこから頂上までは自分の足で登ります。一生に一度は体験してみたいことの1つであると思いますが、はたして、どのくらい大変なことなのでしょうか。坂道をどのくらい登れば頂上に辿り着けるのでしょうか。

三角関数を使うと、高さから道のり（斜辺）を求めることができます。

下のコースを例に考えてみましょう。

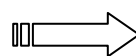
<例> コース名「須走口」

頂上（ゴール）：標高3776m



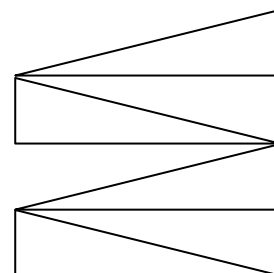
新5合目（スタート）：標高2000m

道のりを
直角三角形の斜辺
と考える。



※傾斜角を 10° とする。

（仮の設定）

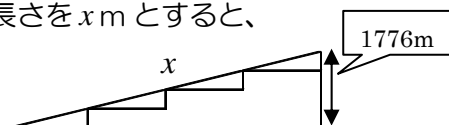


つまり・・・

次の縮図において、斜辺の長さを x m とすると、

$$x = \frac{1776}{\sin 10^\circ} \doteq 10230$$

結論：坂道を 10km ほど登り続ける



<関 連>

鉄道で世界一傾斜が急な坂は、スイスの登山鉄道にあり、その傾斜角はおよそ 25° である。

単元名：三角関数

携帯電話でハート♥を送ろう！！



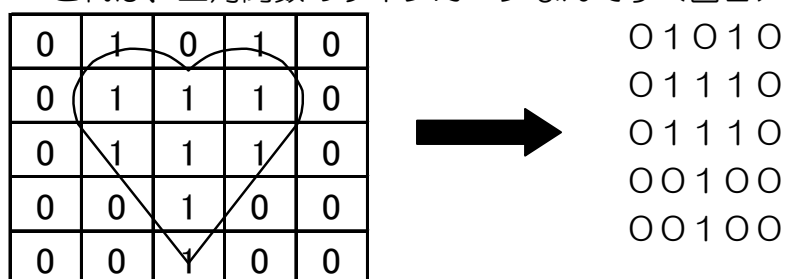
みんなが普段良く使う携帯電話。その携帯電話にも数学が使われています。携帯電話で写真を撮り、メールで送る場合を考えましょう。

まず、撮った写真を細かく分割し、デジタル情報に変換します<図1>。デジタル情報はそのままでは携帯電話に送れません！！

なぜなら・・・携帯電話は電波でなければ受信できないんです！！

そこで、デジタル情報を電波に変換すると・・・

これは、三角関数のサインカーブなんです<図2>。

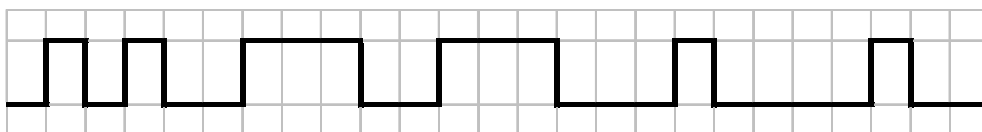


<図1>写真を細かく分割し、デジタル情報に変換

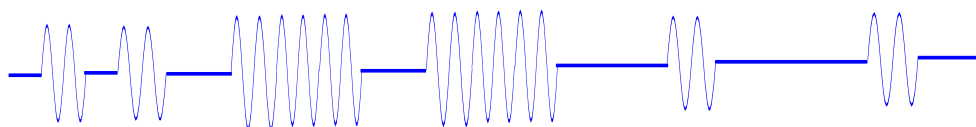
1列目から順番に数字を並べる！！

01010 01110 01110 00100 00100

1を凸で表す！！



凹凸を波形に変形する！！



<図2>デジタル情報を順番に並べ、電波に変換する

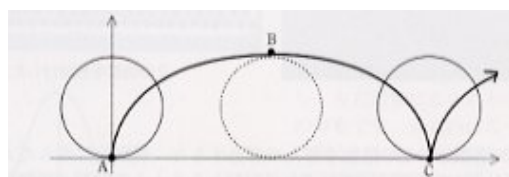
どんな信号波形でも、いくつかのサイン波の重ねあわせに変換（フーリエ変換）できます。高校ではここまで・・・（興味のある人は調べてみてね！！）

サイクリングでサイクロイド！？



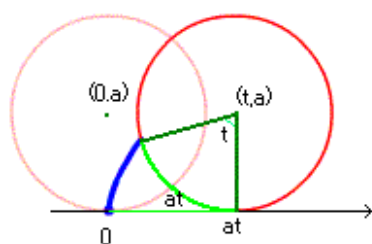
円周上のある1点に対し、この円を直線上を滑らないように転がしてできる点の軌跡を「サイクロイド」といいます。

例えば、自転車のタイヤ（ゴム上）にライトや蛍光塗料をつけて夜間に走ると、明かりはこの「サイクロイド」を描きます。



<図>サイクロイド曲線

<解説>



半径が a の円を考える。

左の図のように、中心角が t (ラジアン) となるように円を回転させたとき、 x 軸の正の方向に進んだ距離は at となります。このとき、点 (x, y) の座標は、

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

となります。

<関連>

サイクロイドの興味深い特徴

- ・ <図>において、サイクロイド曲線の AC 間の長さは円の直径の 4 倍
- ・ サイクロイド曲線と x 軸とで囲まれた面積は円の面積のちょうど 3 倍
- ・ サイクロイド曲線を使った滑り台の途中のどの地点からボールを転がしても、地面に届くのにかかる時間はすべて同じ
- ・ 法隆寺の五重塔など古い建築物の屋根は、サイクロイド曲線のようなカーブを描いている →→→ 降った雨ができるだけ早く地面に落ちる構造

<問題>

円周より内側にとった点はどのような軌跡を描くだろうか。(自転車のスポークに付けた反射板など)

また、円周より外側にとった点はどのような軌跡を描くだろうか。

答え：下の URL にアクセスして試してみてね。

<http://www.junko-k.com/jyoho/simulation/flash-cycloid.htm>

新聞を折るだけで宇宙旅行へ行ける！？



新聞紙を半分に折りたたむことを繰り返すとします。新聞紙の厚さを 0.1mm とすると、50 回折りたたんだときの厚みはどのくらいでしょうか？

答えは「およそ 1 億 1000 万 km」で、これはなんと地球と火星を往復できる距離なのです！（地球と火星が最も近いときの距離は 55000 万 km。）

実際には行けなくても、数学の世界で宇宙旅行ができるなんて、素敵ではありませんか？！



<解 説>

0.1×2^{50} mm を計算し、単位を整理すると、およそ 1 億 1000 万 km という距離になります。これを正確に計算するのは大変なので、およその値を求める手段として、いくつかの計算方法を紹介します。

①桁数から 2^{50} のおよその値を推定する

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{50} &= 50 \cdot \log_{10} 2 \\ &= 50 \cdot 0.3010 \\ &= 15.0500\end{aligned}$$

16桁 (10^{15} に近い数)

これより、 0.1×2^{50} mm \doteq 1 億 km ということがわかります。

②桁数に加えて最高位の数（最初の 2 桁までわかる）からさらに絞り込む

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{50} &= 15.0500 \\ &= 15 + 0.0500\end{aligned}$$

$$\log_{10} 1.12 < 0.0500 < \log_{10} 1.13 \quad \text{より} \quad (\text{※常用対数表より})$$

$$\begin{aligned}2^{50} &= 10^{15} \times 10^{0.0500} \\ &= 10^{15} \times 1.12 \dots\end{aligned}$$

これより、 0.1×2^{50} mm \doteq 1 億 1000 万 km ということがわかります。

<関 連>

- 2^{50} の一の位

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, \dots$$

したがって、一の位は、“2, 4, 8, 6” の循環となります。

$$50 = 4 \cdot 12 + 2$$

これより、 2^{50} の一の位は「4」であることがわかります。

- 2^{50} のおよその値

$2^{50} = (2^{10})^5$ であり、 $2^{10} = 1024$ であることから、 2^{10} をおよそ 1000 とし
て計算してみると、①の解説の「およそ 1 億 km」というところまでは簡単に推
定することができますね。



マグニチュードはエネルギーの対数！？



地震の規模を表す「マグニチュード」は、地震のエネルギーを対数で表したものです。例えば、小さい地震に続いて大きな地震が起こったとします。

最初の地震のエネルギー量が 10^{17} エルグ（エルグ：エネルギー量の単位）で、次に起こった大きな地震のエネルギー量を1000倍の 10^{20} エルグだったとします。このとき、身体に感じる揺れは1000倍でなく、1.5倍くらいと考えられます。つまり、エネルギー量10倍に対して、地震の規模のレベルが1上がるといった考えになります。



<解 説>

地震のエネルギーはものすごく大きいもので、マグニチュード6の地震は、なんと広島に落とされた原子爆弾1発分に相当するエネルギーがあるといわれています。このように、地震のエネルギーは大きいので、 8×10^{20} エルグといったように大きな数値で表されます。

今、エネルギーの量を E 、マグニチュードを M とすると、

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M \cdots \cdots \textcircled{1}$$

という関係式が成り立っています。つまり、マグニチュードというのは、地震によって引き起こされるエネルギーの総量を対数で表したものとイえるのです。

<問 題>

上の①において、 $E = 10^{17}$ として M （マグニチュード）を求めてみよう。

また、 $E = 10^{20}$ のときの M を求め、 $E = 10^{17}$ のときに比べてマグニチュードが何倍になっているのかを求めてみよう。

$$\left(\begin{array}{l} \text{正解： } E = 10^{17} \text{ のとき } M = 3.5 \\ \quad \quad \quad E = 10^{20} \text{ のとき } M = 5.5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{約 } 1.57 \text{ 倍}$$

最速ピッチャーのボールは何 m 上がるか？



日本で最速のボールを投げる投手は、マーク・クルーン（巨人）と言われており、2008年6月1日に162km/hの記録をマークしました。（Webサイト“スポニチ”、“ウィキペディア”より。）

この速さで地面から上空にボールを投げたとき、ボールはどこまで上がるのでしょうか？（ただし、空気抵抗などの環境による減速は考えないものとする。）

答えは、約101.25mです。

これは、微分法を用いて、次のように求めることができます。球速162km/hは、秒速で考えると45m/sとなります。このとき、 t 秒後のボールの高さは、重力を考慮して

$$y \doteq -5t^2 + 45t \quad \dots\dots ①$$

（重力による落下速度はおよそ $4.9t^2$ だが、わかりやすく $5t^2$ とした。）

と表すことができます。

$$y' = -10t + 45 \quad \dots\dots ②$$

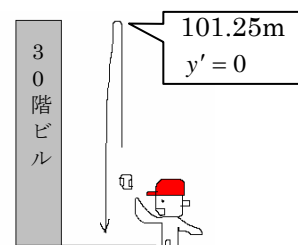
また、 $y \geq 0$ より

$$0 \leq t \leq 9 \quad \dots\dots ③$$

①、②、③より

$t = 4.5$ のとき、 y の最大値 101.25

となり、約4.5秒後に最高到達点 約101.25m に達することがわかります。また、これは「速度が0になる点である」ともいえます。



t	0	...	4.5	...	9
y'		+	0	-	
y	0	↗	101.25	↘	0

<関連> 日本人記録および世界記録（投手の球速）

日本人記録：（公式記録） 松坂 大輔 160km/h

（非公式記録）伊良部秀輝 163km/h

世界記録：（公式記録） ロブ・ネン 164.1km/h（102マイル）

（非公式記録）スティーブ・ダルコウスキー 177km/h

（Webサイト“Yahoo!知恵袋”、“スポニチ”等の情報をまとめたものです。）

<問題>

世界最速といわれている177km/hで上空に投げ上げたとき、ボールの最高到達点は地上何mか。（ただし、上と同様、重力による落下速度を $5t^2$ とする。）

（正解）約120m

単元名：積分法

ドーナツの体積を求めよう！！

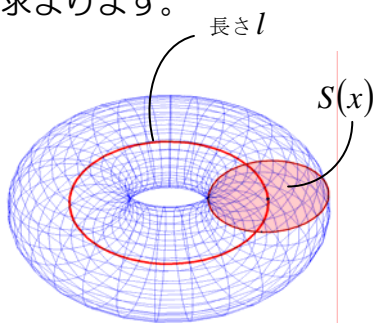


ドーナツ<図1>の体積Vを求めてみよう。(トーラス体の体積)
<図2>のように、断面積S(x)を求め、断面図の中心を結んだ円周の長さlを
かけ算すると体積が求まります。

$$V = S(x) \cdot l$$



<図1> ドーナツ



<図2> 断面図とその中心を結んだ円周

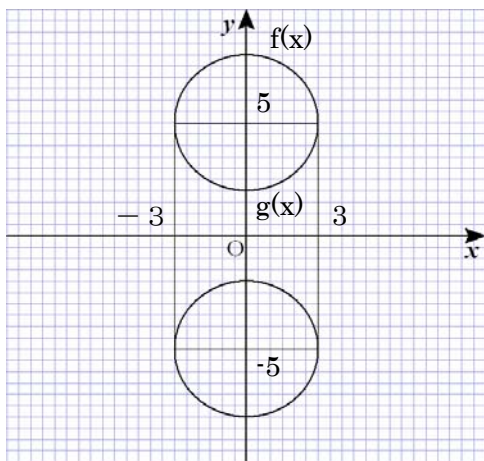
実際に計算してみよう！！

断面図(円)の半径を3、
断面図の中心が描く図形
(円)の半径を5とすると・・・

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\pi \cdot 5 = 90\pi^2$$

これを積分で求めようとする・・・<図3>

$$V = \pi \int_a^b \left(\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right) dx$$



<図3> ドーナツは円の回転体

上の円の方程式は

$$x^2 + (y-5)^2 = 9 \dots \textcircled{1}$$

①をx軸を中心として一回転させると・・・
図2と同じトーラス体になりますね！！

$$\textcircled{1} \text{を变形すると} \dots y = 5 \pm \sqrt{9-x^2}$$

$$\text{つまり、} f(x) = 5 + \sqrt{9-x^2}$$

$$g(x) = 5 - \sqrt{9-x^2} \text{ となる。}$$

よってその体積Vは

$$V = \pi \int_{-3}^3 \left\{ \left(5 + \sqrt{9-x^2} \right)^2 - \left(5 - \sqrt{9-x^2} \right)^2 \right\} dx = 90\pi^2$$

体積が同じ値になりますね！！



単元名：場合の数

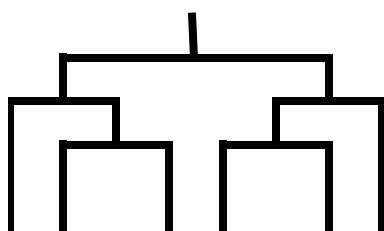
ちょっと使えるお買い得知識！！



お得情報①

オリンピックやワールドカップの試合数はどれくらいか知っていますか？

例えば、6チームでトーナメント方式の試合を行ったときの試合数を求めてみましょう。



左のトーナメント表を見て下さい。

実際の試合数を数えてみると・・・

「5 試合」 ですね！！

でも、参加チームが多くなると全部数え上げるのも大変です。いい方法はないものでしょうか？

ここで、トーナメント方式の原理をもう一度考えてみましょう。

トーナメント方式の試合では、1 試合行うことに、必ず負けるチームが1つ出てきます。優勝チーム以外は1回負けるわけですから、負けたチームの数だけ試合数があるということになります。つまり、

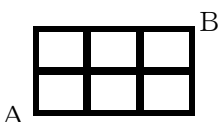
『(出場チーム数) - 1』 ですべての試合数が求まるわけです。



お得情報②

最短経路の問題は、必ずといって良い程数学の授業で扱います。

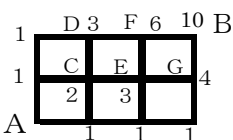
授業では、「同じものを含む順列」や「組合せ」を使って解きますが、その別解を紹介し
ます。難しい公式は一切使いません！！



A地点からB地点へ向かうときの最短経路は、

同じものを含む順列で計算すると・・・ $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ となります。

しかし、次の様にも考えられます！！



まず、Aから出発し「→」へ進むのは1通り。「↑」へ進むのも

1通り。よって、C地点への行き方は「1 + 1 = 2 通り」となります。

つまり、左側の地点への行き方と、すぐ下の地点への行き方をたし算すれば良いのです。

同様にすると、D地点への行き方は「1 + 2 = 3 通り」。

E地点への行き方は「2 + 1 = 3 通り」。

F地点への行き方は「3 + 3 = 6 通り」。

G地点への行き方は「3 + 1 = 4 通り」。

よって、B地点への行き方は「6 + 4 = 10 通り」となるのです。



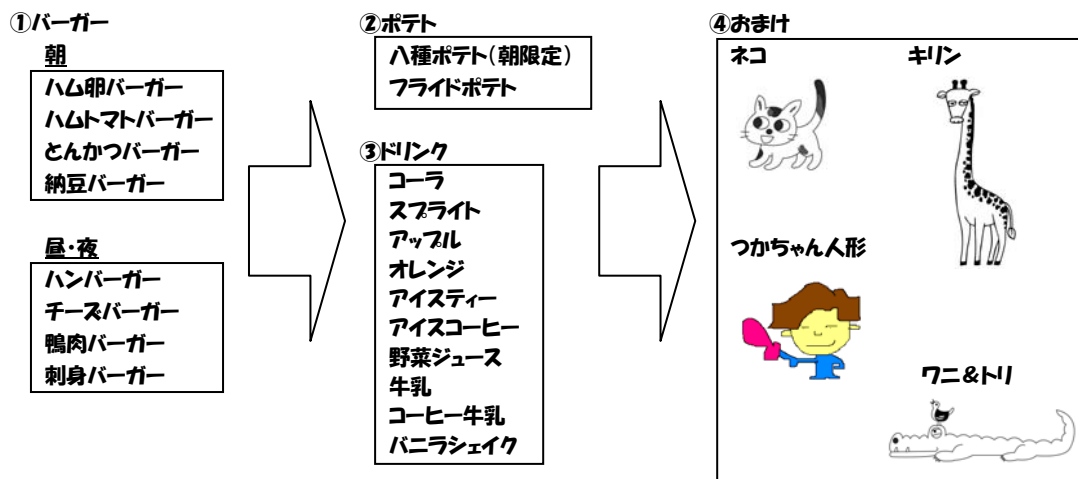
ウキウキセットの選び方は何通り！？



「ランチセット、どれとどれを選ぼうかな〜。」
 こんな風に悩んだことって、誰にでもありますよね？
 そこで、以下のようなセットがあるバーガーショップに行ったとして、
 次の場合の数および確率について考えてみましょう。
 (もちろん、単品での買い物もできます。)



つかちゃんバーガーのウキウキセット



<問題>

- セット
- (i) お昼に行ったとき、ウキウキセットの選び方は何通り？
 - (ii) 時間を限定しないとき、ウキウキセットの選び方は何通り？
 - (iii) 4人で食べようと、昼メニューのバーガーのみを単品で1つずつ買ってき
た。4人のもらいかたは何通り？
 - (iv) (iii)のとき、Aさんがチーズアレルギーだということがわかった(選べる
のは3つ)。4人のもらいかたは何通り？
 - (v) (iii)のとき、くじで決めることとなった。私(自分)が鴨肉バーガーを食
べられる確率は？(“同様に確からしい”とする。)
 - (vi) (iv)のとき、くじで決めることとなった。最初にAさんがチーズバーガー
を除く3つのくじから1つを引き、次に私がかくじを引くとする。私が鴨肉
バーガーを食べられる確率は？
- 単品

(正解)：(i) $4 \times 1 \times 10 \times 4 = 160$ 160通り (ii) $8 \times 2 \times 10 \times 4 = 640$ 640通り
 (iii) $(4!) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 24通り (iv) $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 18通り
 (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ $\frac{2}{9}$

単元名：確率

初志貫徹は損！？



<問題>

3枚のカードの中に1枚だけ「あたり」があります。
あなたはこの3枚のうちの「あたり」を当てるゲームをしようとしています。

<ルール>

ディーラー(カードの配り手)が、3枚のカードを裏に並べる。

私はそのうちの1枚を選ぶ(指す)。

ディーラーが、他の2枚のうち「あたり」でない1枚を表にし、「カードを変えますか？」と私に尋ねる。(つまりここでは2枚が裏の状態となる。)

私は、まだ開いていない2枚のカードからいずれかを選び、最終決定とする。

さて、あなたが「あたり」を選べる確率が最も高くなるのは次の3つのうちどれでしょう？

- ① 最初に選んだものを変えずに、そのまま開ける。
- ② 最初に選んだものを変えて、もう1枚の裏のカードを開ける。
- ③ 最初に選んだものでも、もう1枚の裏のカードでも、確率は変わらない。

<正解>

「②」です。



<解説>

ルールにおいて、ディーラーは必ず「あたり」でない1枚を教えてください。
次の場合を比較してみてください。

1. 始めから「あたり」を狙いにいく場合

始めに選ぶ時点で「あたり」を選んでないといけないので、確率は $\frac{1}{3}$ 。

2. 後でカードを変えることに決めておき、始めは「あたり」でないカードを狙いにいく場合

始めに「あたり」でないカードを選べる確率は $\frac{2}{3}$ 。これが正しいとき、

ディーラーがもう一枚の「あたり」でないカードを開けてくれるので、裏の2枚のうち選んでいない方のカードは必然的に「あたり」となる。

つまり、この方法で「あたり」を選べる確率は $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$ 。

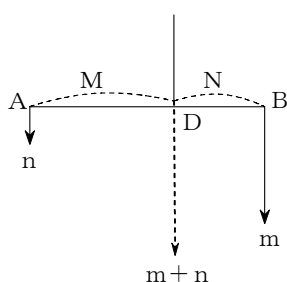
不思議な図形の世界！！



「チェバ・メネラウスの定理」は名前ぐらいは知っているも、定理自体はなかなか暗記するのが大変です・・・。

実際中学入試から大学入試まで、ずっと役立つ定理であるにもかかわらず、丸覚えして、何がなんだか分からなくなっていた方を、不思議な図形の世界へご案内します！！

【棒の質点と重心】



左の図をご覧ください。棒の両端A, Bに、重さがそれぞれn, mの重りをぶら下げます。(重さのかかった点のことを質点といいます。ここでは3点A, B, Dが質点ということになります) さて、どのようなときに平衡状態になるかということ・・・

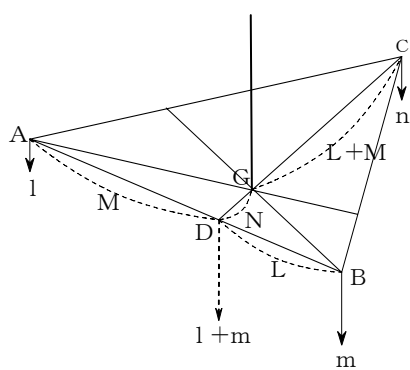
$$\begin{aligned} & (\text{点Aにかかる重さ}) \times (\text{点Aから点Dまでの距離}) \\ & = (\text{点Bにかかる重さ}) \times (\text{点Bから点Dまでの距離}) \end{aligned}$$

すなわち $n \times M = m \times N$ となっているときなのです

このとき、質点Dのことを重心といい、重さ $m+n$ がかかっています。



【三角形の質点と重心（3質点の重心）】



次に、上の説明をちょっと応用して三角形で考えてみましょう。3つの頂点 A, B, Cに、それぞれ、重さl, m, nの重りをぶら下げるとします。このとき、2つの質点A, Bの重心は図の点Dになります。

また、点Dと残りの質点Cとの重心をGとします。今度は線分CDについて

$$(l + m) \times N = n \times (L + M)$$

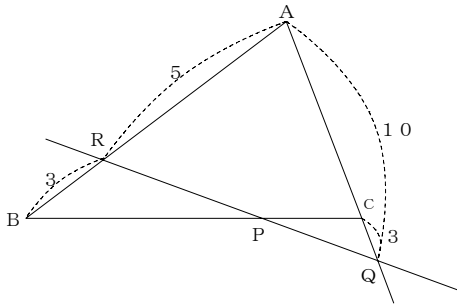
が成り立つようにGを決めたのですから、Gにひもをつけて三角形の板をつると、平衡状態になります。

ここで、重さ $l+m+n$ がかった質点Gのことを、3質点A, B, Cの重心といいます。ここまではよろしいでしょうか？

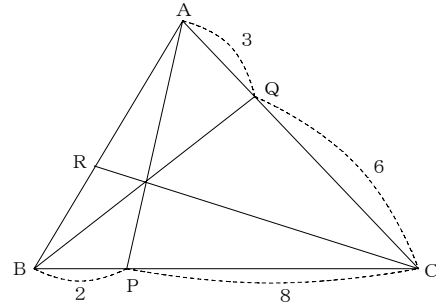
それでは、いよいよ魅力的なチェバ・メネラウスの世界へご案内します



(1) BP : PC を求めよ。



(2) AR : RB を求めよ。



上の図の問題は

(1) が「メネラウスの定理」を用いて解く問題

(2) が「チェバの定理」を利用して解く問題

として教科書にも載っています。この問題を【三角形の質点と重心】の考えを使って解いてみます！！

チェバ・メネラウスの定理

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(1) の解答

Aに3グラム、Bに5グラムの重りをぶら下げると、Qには7グラムの重りをぶら下げればよいことになり、質点Cには10グラムの重さがかかります。

よって、RP : PQ = 2 : 1 となります。

(2) の解答

Aに2グラム、Cに1グラムの重りをぶら下げると、Bには4グラムの重りをぶら下げればよいことになります。

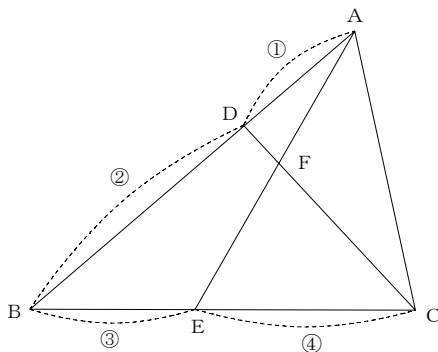
よって、AR : RB = 2 : 1 となります。

どうでしょうか？

メネラウスの定理やチェバの定理を物理学の分野から考えることによって、無味乾燥に思えた公式の意味が感動的なものになりましたでしょうか？



【問題】 下の図において、次の比を求めよ。



(1) AF : FE

(2) CF : FD

(正解) (1) 7 : 8 (2) 4 : 1

単元名：平面図形、式と証明

2数の和・差を直径にもつ円の有用性

そうかそうか。



相加平均と相乗平均の大小関係として、次の公式が知られています。

$a > 0, b > 0$ のとき

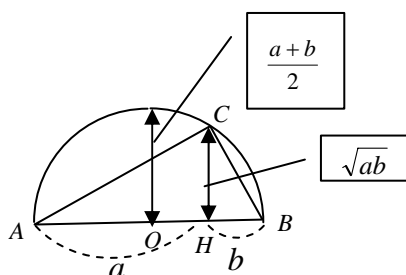
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである

この公式の証明については、両辺を2乗したものの差を考えれば簡単にできます。

では、図形的に考察するとどのように証明することができるでしょうか。

実は、下の図のように、半円と直角三角形を用いて証明することができます。



<解説>

線分 AB を直径にもつ円の中心を O とし、円周上に点 A, B と異なる点 C をとる。また、点 C から線分 AB 上に垂線 CH をおろす。

このとき、 $\triangle CAH \sim \triangle BCH$ であることを利用すると、 $CH = \sqrt{ab}$ となり、上の不等式が成り立つことがわかる。等号が成り立つのは CH が直径と等しくなるときである。また、点 C が点 A, B と重なるときも不等式が成り立つのは明らか。

<関連>

上の図を利用して、次のことも言えます！

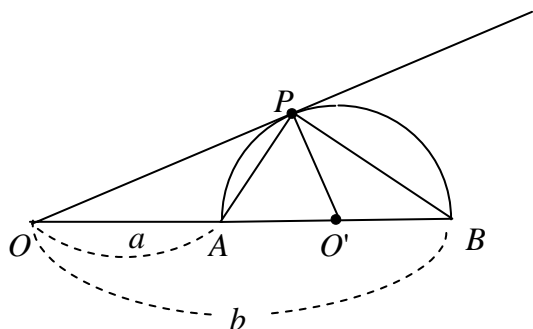
2辺の長さが a, b である長方形と同じ面積をもつ正方形は必ず描ける

上の図の \sqrt{ab} を一辺にもつ正方形をかけばよいということですね。

先ほどの図では $a+b$ を直径にもつ円で考えましたが、 $b-a$ を直径にもつ円を使っても、2辺の長さが a, b である長方形と同じ面積を持つ正方形を描けるという証明はできるんですよ！（ $0 < a < b$ ）

さあ、考えてみましょう！

<証明>



上の図において、 $OA = a$ 、 $OB = b$ とし、3点 O 、 A 、 B は一直線上にあるとする。 $(0 < a < b)$

このとき、線分 AB を直径にもつ円 O' に点 O から接線をひき、接点を P とする。また、その円の中心 O' を点 P を結ぶと、

$$\triangle OAP \sim \triangle OPB$$

となることがわかり、

$$OA : OP = OP : OB$$

$$\therefore OP^2 = OA \cdot OB$$

すなわち、 OP の長さが求めたい正方形の一辺の長さとなることがわかる。

単元名：数列

これであなたも芸術家・建築家になれる？



黄金比は知ってますか？

色々な歴史的建造物に使われています。どういうものかと言うと・・・

右図の四角形において、

$$AD:AB = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\doteq 5:8)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots \right)$$



である四角形を「黄金四角形」

といい、この比を「黄金比」と言います。

具体的には、ミロのヴィーナス、パリの凱旋門、パルテノン神殿などでこの黄金比が見られます。黄金比は形が一番美しく見えるそうです。

パルテノン神殿

さて、この黄金比はフィボナッチ数列と深く関係しています。



<解説>

フィボナッチ数列は以下の漸化式で与えられる数列です。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

実際に数字を書き出してみると

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ……となります。

隣り合う2数の比	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	…
2数の比の値	1	2	1.5	1.66 …	1.6	1.62 …	1.61 …	1.61 …	…

2数の比の値を見たときに、何か気づきませんか？

ある値に近づいているのですが、その値こそまさしく「黄金比」なのです。



<問 題>

日常生活の中に隠れている、フィボナッチ数列を見つけてみよう。

(解答例1) 松ぼっくりのかさ

松ぼっくりのかさをよく観察してみると、
右回りに8個ずつ、左回りに5個ずつ、または右回りに
5個ずつ、左回りに3個ずつになっている。

この、(8, 5), (5, 3) はフィボナッチ数である。



<関 連>

松ぼっくりの松かさには螺旋状に並び、螺旋の外角を調べると、
およそ 137.5° である。

この 137.5° は黄金比を使って、

$$360^\circ \times \left(1 - \frac{1}{\text{黄金比}}\right) \doteq 360^\circ \times \left(1 - \frac{1}{1.618}\right) \doteq 137.5^\circ \quad (\text{この角を黄金角という})$$

と表すことができる。螺旋の外角は黄金比によっているのである。

(解答例2) ひまわりの種

ひまわりを正面からよく観察してみると、真ん中にある種の
ならび方は螺旋状に21個、34個、55個、89個・・・
となっている。

これらの数字はフィボナッチ数である。



単元名：数列

3乗の和は1乗の和の2乗！？



次の公式を見てください。不思議だと思いませんか？！

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad , \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

n を自然数とすると、1から n までの「3乗の和」はなんと「1乗の和の2乗」で求められるのです。

この公式は、 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ に $k=1, 2, \dots, n$ を代入していき、辺々引いていく方法で証明できます。数学的帰納法でも証明できます。

しかし、“図形を用いて考察し、証明”することもできる、大変興味深い公式でもあるのです！

ここでは、その“図形を用いた考察”についてお教えしちゃいましょう！

<解説>

次ページの図のように、一辺の長さが1, 2, 3, …である正方形のタイル（切ってもよい）をそれぞれ1枚, 2枚, 3枚, …と用意すると、それを正方形になるように並べていくことができる。

一辺の長さが $\frac{1}{2}k(k+1)$ となる正方形ができたなら、一辺の長さが $k+1$ であるものを $k+1$ 枚使用し、新たな正方形を作る。

このとき、正方形の一辺の長さは $\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$ になる。（数学的帰納法のように考える。）

- ① 新たにできる正方形の横（縦）に並ぶタイルの枚数

対角線上にくる
1枚を除いて2
等分（横と縦）

$$\frac{(k+1)-1}{2} + 1 = \frac{k}{2} + 1 \quad (\text{枚})$$

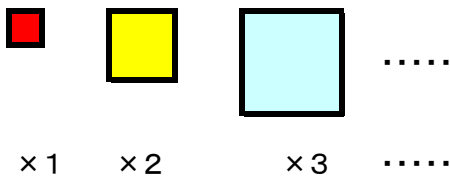
※ただし、 k が奇数のときは1枚を半分に切ることとなる。

- ② 新たにできる正方形の一辺の長さ

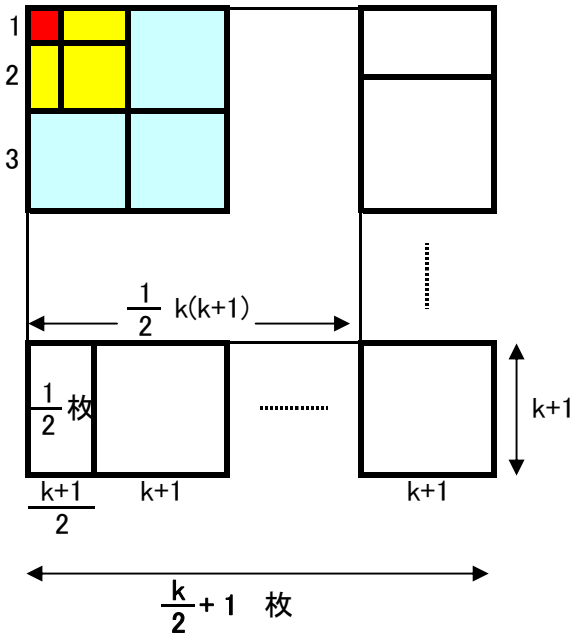
$$\left(\frac{k}{2} + 1 \right) \times (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

※“(①で求めた枚数) × (タイルの一辺の長さ)”

<準備>

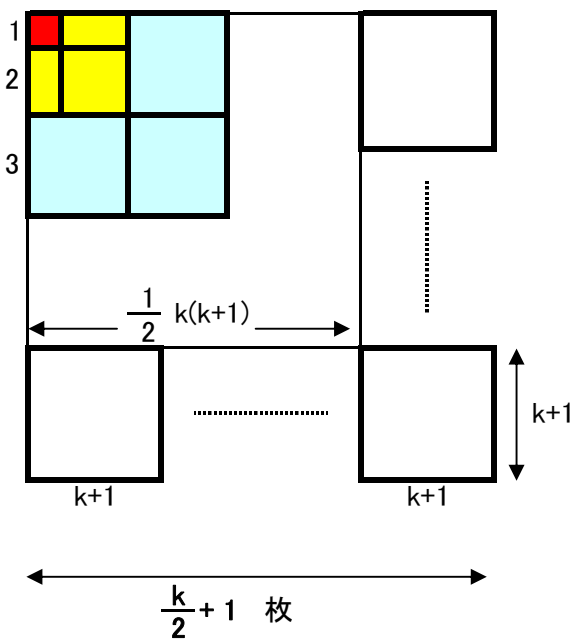


(i) k が奇数(すなわち $k+1$ が偶数)のとき



一辺の長さが $k(k \geq 1)$ のタイルまで並べ、一辺の長さが $k(k+1)/2$ の正方形ができたとする。このとき、右および下の辺に沿って、一辺の長さが $k+1$ のタイルを並べていくと、一辺の長さが $(k+1)(k+1+1)/2$ の正方形が新たにできる。

(ii) k が偶数(すなわち $k+1$ が奇数)のとき



(i) のときと同様。

単元名：数列

夢のある数列の話！？



「今日は29日木曜日ですが、2週間前の木曜日は何日でしたか？」
カレンダーは、日常生活における数列の例として、よく挙げられます。
「もしも貯金が1年間で2倍に増えたら、10年後にはいくらになりますか？」
「そのお金で何を買いますか？」
これは、非日常的ではありますが、夢のある話ですね。
現実の世界では無理な話でも、数学の世界では夢を語るのは自由です。
「2年後は4万円、3年後は8万円だから、10年後は・・・1024万円!？」
カレンダーを通して身近な例を考えた後は、「もしも・・・。」という話で数列を楽しみませんか？！

日	月	火	水	木	金	土
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

<解説>

① 「カレンダー」

今日が29日（木）だとしましょう。先週の木曜日は22日ですね。遡って考えると、今月の第1週の木曜日は1日です。5週目の日にちは1週目の日にちに7を4回たすことで導かれます。

初項 a 、公差 d の等差数列の第 n 項 a_n は 「 $a_n = a + (n-1) \cdot d$ 」

② 「貯金」

2009年4月、貯金が1年後に2倍になる銀行に、1万円を預けたとします。2010年（2年目）には2万円、2011年（3年目）には4万円、そして2019年（10年目）には $(1 \times 2^{5-1}) = 1024$ 万円になります！！

年	2009	2010	2011	2012	2013	...
金額	1	2	2^2	2^3	2^4	...

初項 a 、公比 r の等比数列の第 n 項 a_n は 「 $a_n = a \cdot r^{n-1}$ 」

単元名：ベクトル

ベクトルの「内積」って何!?



突然ですが、ベクトルの「内積」って、何でしょう？

例えば、

$$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角 } 60^\circ$$

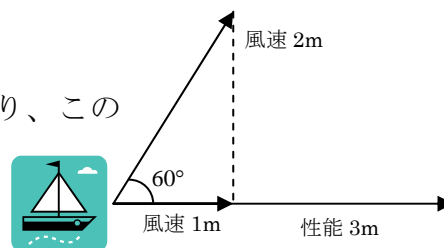
$$\Rightarrow \text{内積 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$$

と求めることができますが、この「3」という数字はいったい何を意味しているのでしょうか???

<解説>

右の図を例に考えましょう。

ゴールを目指してレースをしているヨットがあり、このヨットは風速 1m の風で 3m 進むことができる性能をもっています。(つまり、風速 10m の風が吹けば 30m 進むことができるのです。)



しかし、風というのは気まぐれですから、必ずしもゴールに向かって真っ直ぐ追い風が吹いてくれるわけではありません。

今、ゴールに向かって 60° の角度で風速 2m の風が吹いたとしましょう。このとき、実際にゴールに進むのに役立つ風は 1m 分となります ($2 \times \cos 60^\circ = 1$)。したがって、ヨットは $3 \times 1 = 3$ (m) ゴールへ近づくことになります。

このとき、「 \vec{b} という風は、 \vec{a} の方向に 3m 分の仕事をした」ということができます。これが、 \vec{a} と \vec{b} の内積の意味です。

別の風を例に考えてみましょう。

もし風速 2m の風が真後ろから追い風として吹いたら、 \vec{a} と \vec{b} のなす角は 0° となり、内積は「 $3 \times 2 \cos 0^\circ = 6$ 」となります。

なす角が 120° となる向かい風が吹いたらどうでしょう。

内積は「 $3 \times 2 \cos 120^\circ = -3$ 」となり、この風がゴールに向かうのを邪魔していると捉えることができます。だから、負の数が出てくるのですね。

単元名：ベクトル、1次変換

ゲームキャラクターの動きの秘密！！



小さい頃にテレビゲームをやった経験のある人は多いと思います。
そのゲームに出てくるキャラクターの動きはどうなってるのでしょうか？
実は・・・キャラクターはたくさんの平面から作られています。(図1)
その平面の法線ベクトルの向きを変えることによって、キャラクターの動きが
出てくるのです。(図2)

図1

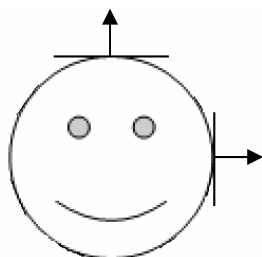
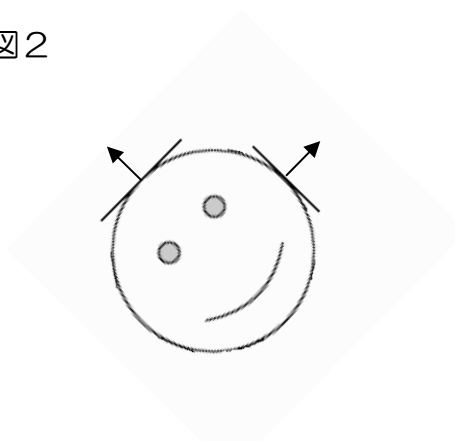


図2



<解説>

点 (x, y) を原点を中心として θ だけ回転させた先の点を (x', y') とすると、

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad \text{と書けます。}$$

この2式は行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{となります。}$$

ここで、 $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおくと、

$\vec{p}' = A\vec{p}$ となります。(←1次変換を表す式)

<問題>

点 $(4, 2)$ を原点を中心として 60° 回転させたとき、移動した先の点の座標を求めよ。

(正解) $(2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$

群馬県総合教育センター
平成21年度 特別研修
教育情報推進係 岩崎 晶典
金谷 恵子