

群 教 セ	G03 - 03
	平22.242集

図形領域における演繹的な考え方を 高める指導の工夫

— 数学的な推論を支える推理の活動を取り入れて —

長期研修員 荒巻 武一

《研究の概要》

本研究は、図形領域において演繹的な考え方を高めるために、生徒が課題から仮定と結論を認識し、仮定から結論までの証明の筋道を論理の規則に従って組み立てて考えることを目指した。そのために、単元を通して数学的な推論を支える推理の活動を授業に取り入れ、生徒が見通しをもって追求することを手だてとして考えた。本活動を通して、一般化できる事柄を筋道立てて考え、三角形の合同条件の活用ができるようにした。

キーワード 【数学 演繹的な考え方 数学的な推論 推理 証明】

I 主題設定の理由

新学習指導要領解説数学編では、数学科改訂の要点における目標の改善で、「数学科の指導は、基礎的・基本的な知識及び技能を習得し、それらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力等をはぐくむ必要がある」とあり、思考力を高めることを挙げている。

群馬県の全国学力・学習状況調査では、中学校数学の結果は全般的に全国平均をかなり上回っている。しかし、「活用」正答率の低さにはやや課題が見られる。特に「証明の意義」はもっとも正答率が低い。このような新学習指導要領と群馬県の課題性に基づいて、研究のテーマを「図形の証明」に焦点を当てていきたいと考えた。

「図形の証明」の図形領域において、中学校1年までの学習内容では、観察や操作・実験などの活動を通して図形についての理解を深めたり、考察する力を伸ばしたりすることを目指している。中学校2年からの学習内容では、新たに演繹的な考え方の必要性和意味を理解し、論理の規則に従って表現する力を養うことを追加して目指している。演繹的な考え方とは、仮定から結論を導くという証明において、前提となる仮定から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す合理的で正しい推論である。

しかし、実際の授業場面では、生徒にとって学習内容が難しく、理解できなかったり、理解をするための時間が多くかかったりするという理由から、教師主体の教え込む授業が多くなっている。例えば、形式的に証明の書き方を覚え込ませたり、証明の穴埋め問題を考えさせたりする授業である。そのため、演繹的な考え方を高めるための活動を取り入れていない場合が多い。そこで、演繹的な考え方を高めるために、数学的な推論を支える推理の活動（以後「推理の活動」とする）を手だてとして取り入れていくことを考えた。推理の活動とは、推論を推し進めるための学習活動である。教師が教え込むのではなく、生徒が推理の活動を通して考え、気づき、理解していく。このように生徒が自ら考えて理解することなしに、仮定から論理の規則に従って推論を構成していく演繹的な考え方を高めることはできないと考える。

本研究では、単元全体を通して、数学的な推論を支える推理の活動を授業に取り入れ、学習内容を構築していくことにより、演繹的な考え方を高めることができると考え、本主題を設定した。

II 研究のねらい

図形の論証において、単元全体を通して数学的な推論を支える推理の活動を取り入れれば、演繹的な考え方が身に付き、根拠となる事柄や思考の過程も明確になるので、演繹的な考え方が高まることを実践を通して明らかにする。

Ⅲ 研究の見通し

- 1 つかむ過程において、具体的に考える推理を取り入れた学習活動を行えば、複数の具体例の共通点から、事象の特徴や法則性を見いだすことができるので、推論の方向性や過程を考えやすくなるであろう。
- 2 追求する過程において、仮定から広げる推理を取り入れた学習活動を行えば、事象の前提から仮定をとらえ、記号化することができるので、仮定から結論へ根拠となる事柄が明確になり、見通しをもって追求することができるであろう。
- 3 深める過程において、見通しをもてないときに結論から広げる推理を取り入れた学習活動を行えば、逆から順序立てて考える力を身に付けることができるので、複数の推論の方向性や過程を考えやすくなるであろう。

Ⅳ 研究の内容

1 基本的な考え方

(1) 目指す生徒像とは

目指す生徒像とは、図形領域において仮定と結論を認識し、論理の規則に従って筋道を立てて考えることができる生徒である。

演繹的な考え方とは、与えられた論拠を前提とし、結論を導くという論理の規則に従って考える方法である。この演繹的な考え方を見通しをもってできることが、演繹的な考え方が高まることと考える。

また、新学習指導要領において第2学年の図形領域では、図形を具体的な事象を基に考えたり、事象の前提をとらえたりする活動を通して、数学的な推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を養うことをねらいとしている。また、この時期の生徒には形式的な証明の記述を要求するのではなく、自分の思考を筋道立てて考えることが大切であるとある。したがって、演繹的な考え方を高めることは、新学習指導要領のねらいにも迫ると考える。

(2) 数学的な推論を支える推理の活動とは

数学的な推論とは、主なものとして、複数の具体例の共通点から事象の特徴や法則性を見いだす推論、似たような条件のもとでは似たような結果が成り立つであろうと考えて、新しい命題を予想する推論、そして演繹がある。それらは数や図形の性質などを見いだしたり、数学を利用したり、数学的に説明し伝え合ったりする際に重要なはたらきをする。

推理の活動とは、この三つの推論を支える学習活動であり、推論を推し進めるための学習活動である。具体的には、課題に対して、具体例を複数考えたり、仮定の内容をとらえ記号化したり、結論から証明の根拠となる条件を考える活動である。推理の活動を繰り返すことにより、数学的な推論の三つの推論を高めていく。そして、数学的な推論の全体が高まることにより、その中の一つである演繹的な考え方も高まると考える。生徒は推理の活動を通して、考え、気づき、理解していく。そして、生徒自らが考えて理解するからこそ、仮定から論理の規則に従って推論を構成していくという演繹的な考え方を高めることができると考える。

演繹とは、「前提となる命題から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す推論である」という間違いのない正確な推論である。この考え方を図形領域の証明を対象に考え直すと、仮定から結論を導くという証明において、前提となる仮定から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す合理的で正しい証明ができると考える。

研究の見通しの三つの過程において、推理の活動を以下のように考える。

つかむ過程では、具体的に考える推理の活動を取り入れる。この推理の活動では、図形の性質について具体的な数値の入った図形を複数考え、共通点をつかむ活動から特徴や法則性を見いだす活動をする。また、複雑な図形から目的の図形を見いだす活動を行う。この活動により、特別な場合

についての観察・操作や実験などの活動に基づいてそれらを含んだ、より一般的な結果を導き出すという考え方が高まる。さらに、課題の数量関係をとらえる力が高まり、推論の過程や方向性を考える力が高まると考える。

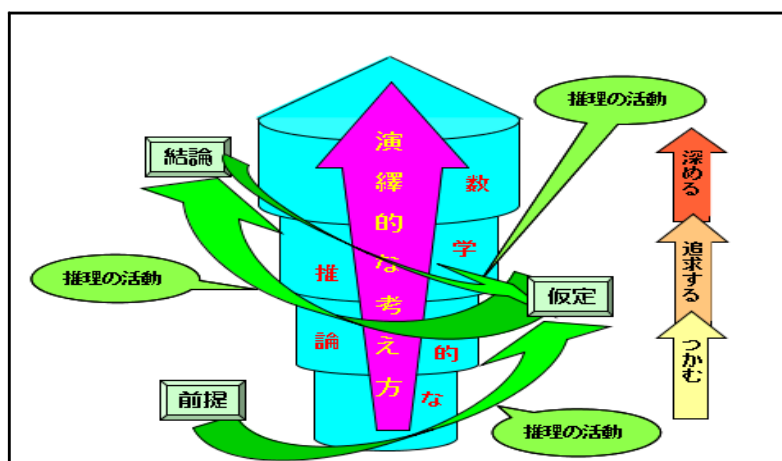
追求する過程では、仮定から広げる推理の活動を取り入れる。この推理の活動では、多様な表現の課題から仮定と結論を記号で表すことを考える活動を行う。この活動により記号化された仮定・結論から必要な条件や根拠となる事柄の関係が考えやすくなり、見通しをもつことができると考える。また、証明を考える過程では、証明の条件や根拠となる事柄が考えやすいために「AならばB、BならばC」という論理の規則に従って思考を展開する演繹的な考え方が高まると考える。

深める過程では、結論から広げる推理の活動を取り入れる。この推理の活動では、仮定から見通しをもてないときに、結論から逆に仮定へ筋道を考える活動である。具体的には、結論が成り立つために必要な条件や根拠を考えたり、仮定に当てはまる条件を絞り込んだり、結論を図の中に表して仮定へのつながりを考えたりする活動を取り入れる。仮定から考えるA、B、Cという思考を逆に結論からC、B、Aという思考に展開するため、推論の過程の見通しがもて、演繹的な考え方が高まると考える。

表1 推理の活動

推 理	推 理 の 内 容 と 効 果
具体的に考える 推理 ア	具体例を複数考えることにより、共通点をつかむことで、特徴や法則性を見いだす推理の活動。 具体的に考えることにより、課題の数量関係をとらえやすくする。また、課題の特徴や法則性を見いだすことができるので、推論の方向性や過程が考えやすくなる。 例えば、n 角形の内角の和を求めるときに、具体的に三角形や四角形、五角形の内角の和を求めることから考える活動である。
仮定から広げる 推理 イ	課題から仮定の内容をとらえ記号化することで仮定を認識する推理の活動。 記号化することで仮定と結論から必要な条件を考えやすくし、見通しをもつことができる。また、推論の根拠となる事柄も明確になる。 例えば、事象の前提に垂直であるとあったときに、$\angle A = \angle B = 90^\circ$ のように証明で表す形に記号化することを考え、仮定を認識する活動である。
結論から広げる 推理 ウ	結論から証明の根拠となる条件を考え、仮定に当てはまる条件を絞り込むことで、推論を進めていく推理の活動。 課題に対する見方や考え方を最初から順番に考えるのではなく、最後からさかのぼって考えるので、仮定から結論への推論だけでなく、結論から仮定への推論も合わせて考えることができ、推論の過程の見通しがもてる。 例えば、結論が平行であったときに、平行を示すために平行線になるための条件を考え、同位角か錯角が等しくならないかと考える活動である。

2 研究構想図



V 研究の計画と方法

1 実践計画

対 象	中学校第 2 学年	実施期間	10月12日～11月22日
単元名	平行と合同	授 業 者	長期研修員 荒巻 武一

2 抽出生徒

A	直感的な発想がよく、着眼点もよいが、深く考えたり筋道立てて考えたりすることが苦手で、問題を解く途中で止まってしまうことが多い。具体的に考える推理推理や仮定から広げる推理を活用させて、課題の数量関係をとらえ、見通しをもって考えることで、自分の力で結論まで証明が書けるようにしたい。
---	---

3 検証計画

過程	検 証 の 観 点	検証の方法
つ か む	具体的に考える推理を取り入れた学習活動を行えば、複数の具体例の共通点から、事象の特徴や法則性を見いだすことができるので、推論の方向性や過程を考えやすくするために有効であったか。	○学習活動の観察・発言内容 ○学習プリントの記述 ○授業後のまとめ
追 求 す る	仮定から広げる推理を取り入れた学習活動を行えば、事象の前提から仮定をとらえ、記号化することができるので、仮定から結論へ根拠となる事柄が明確になり、見通しをもって追求することに有効であったか。	○学習活動の観察・発言内容 ○学習プリントの記述 ○授業後のまとめ
深 め る	結論から広げる推理を取り入れた学習活動を行えば、逆から順序立てて考える力を身に付けることができるので、複数の推論の方向性や過程を考えやすくなることに有効であったか	○学習活動の観察・発言内容 ○学習プリントの記述 ○授業後のまとめ

4 単元の目標及び評価規準

目標	観察、操作や実験を通して基本的な平面図形の性質を見だし、根拠を明らかにしながら筋道を立てて考える能力を養う。		
	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方と考え方	数学的な表現・処理
	具体的な事象を通して平行線の性質や三角形の合同条件などを基に平面図形の基本的な性質を確かめるなど数学的活動の楽しさや数学的に考察することのよさに気付く、それらを意欲的に問題の解決に活用しようとする。	平行線や対頂角の性質と三角形の合同条件を基に、数学的な推論の方法を用いて図形の性質を論理的に考察する。	証明を記述するときに、推論の過程を数学的な用語・記号を用いて簡潔に表現したり、図形相互の関係を記号で表現したりすることができる。
			数量、図形などについての知識や理解 平行線の性質や三角形の合同条件などを理解し、それらを用いて証明の仕方を理解している。

5 指導計画（全15時間）

過程	時間	主な学習活動	学習活動への主な支援	推理の活動	種類
つ か む	1	・対頂角の意味とその性質を考える。 ・同位角、錯角の意味と平行線の性質を考える。	・対頂角、同位角、錯角の意味を図と関連させて考えさせる。 ・平行線をかくことから、平行線の性質を考えさせる。 ・問題を多く解かせる。	・平行線の作図から平行になる根拠を推理する活動	ア
	2	・多角形の内角の和の求め方とその使い方を考える。	・三角形、四角形、五角形の内角の和を三角形の内角の和（ 180° ）を使って考えるように助言する。 ・ n 角形の内角の和が同じように考えて求められるように助言する。	・三角形、四角形、五角形の内角の和を具体的に求めることから、 n 角形の内角の和の求め方を推理する活動	ア
	3	・多角形の外角の和の	・三角形、四角形、五角形の外角の和を内角の和を	・正多角形の外角の和が	ア

つかむ		求め方とその使い方を考える。	利用して考えるように助言する。 ・ n 角形の外角の和が同じように 360° であることを説明できるように個別指導する。	360° になることから、三角形、四角形、五角形の外角の和を考える推理の活動	
	4	・ 三角形の外角の性質とその使い方を考える。	・ 三角形の内角の和を使って解く問題演習をさせ、三角形の外角の性質に気付かせる。 ・ 三角形の外角の性質の証明を考えさせる。	・ 三角形の内角の和の性質を使って、外角を具体的に求めることから、三角形の外角の性質を推理する活動	ア
	5	・ 星形の図形の角の和を考える。	・ 矢じりの形と星形の問題を既習の図形の性質を活用させて考えさせる。	・ 星形から多様な三角形を見いだすことで、三角形の見方や数え方を推理する活動	ア
む	6	・ 合同の意味と性質、合同を表す記号の意味を考える。	・ 仲間はずれ問題を考え、合同の意味を実感させる。 ・ 対応を意味と書き方（順序）を意識させて、合同の記号を使った表し方を考えさせる。	・ 同じ条件から具体的に作図することにより、合同な三角形ができ、合同条件になることを推理する活動	ア
	7	・ 三角形の合同条件を考え、三つの条件に決まることを考える。	・ 合同な三角形を作図する問題を考えることで、合同条件を考えさせる。 ・ 全員が合同な三角形しかかけないことから、角や辺の場所が決まり、合同条件を導かれることを確認させる。		
追求める	8	・ 問題文から仮定と結論をとらえ、記号で書き表すことを考える。	・ 仮定と結論の意味を考えさせる。 ・ 問題演習を行わせ、仮定と結論が問題から読み取れるように個別指導する。	・ いろいろな表現の文章から仮定や結論をとらえ、記号に書き表す推理の活動	イ
	9	・ 三角形の合同条件の活用の仕方を考える。	・ 合同な三角形を見付け、その合同条件を意識させる。 ・ 合同条件に必要な要素を三つ、根拠となる事柄を考え具体的に記号を使って表すことを考えさせる。	・ 事象から仮定を記号で表すことで、合同条件を推理する活動	イ
	10	・ 証明の意味を考え、証明の記述のポイントを考える。 ・ 三角形の合同における証明の書き方を考える。	・ 「三角形の内角の和は 180° である」の証明を考えることで、証明の意味とポイントを実感させる。 ・ 三角形の合同の証明で、内角の和と同じように考え、証明の記述の形式を予想させながら説明する。 ・ 学習プリントを使って、合同な三角形の証明の書き方を繰り返し行えるようにする。	・ 仮定から合同条件の 3 要素で仮定にあるものと足りないものを認識することで、合同条件を推理する活動	イ
	11	・ 三角形合同の証明の活用の仕方や証明の書き方を考える。	・ 学習プリントを使って証明の問題を行い、証明を書く順や決まり文句を意識させて考えさせる。 ・ 学習プリントを使って、三角形の基本的な証明の問題を行い、証明を自力で書けるようにする。	・ 仮定の条件が明示されていない証明問題において、仮定を読み取り、記号化する推理の活動	イ
深める	12	・ 三角形の合同を使った証明の仕方やその書き方を考える。	・ 学習プリントを使って、三角形の合同の証明の後、対応する辺や角を理由に、結論へ導く証明を自力で書けるようにする。	・ 結論が三角形の合同でない証明問題において、結論から逆に必要な根拠を考え、証明の筋道を考える推理の活動	ウ
	13	・ 単元のまとめとして、既習の基礎基本から	・ 三つの推理を問題に合わせて、活用できるように助言する。		
	14	応用までの問題演習	・ 個別指導を中心に、分からない生徒に対して、今		
	15	を行い、多様な証明を考える。	までの学習を振り返らせる。		

VI 研究の結果と考察

1 つかむ過程 1～7時間目の授業実践(具体的に考える推理の活動)

(1) 対頂角の性質、多角形の内角の和を考える授業実践(1, 2/15)

対頂角の性質を考える際には、対頂角の一つを具体的に 60° と 30° の角度にして図に表し、対頂角が等しくなる理由を推理した。図1から直線上に並んだ角は 180° になるので、
「対頂角 $=180^\circ$ - 対頂角の間の角」
という関係が成り立ち、対頂角の性質の説明をすることができた。

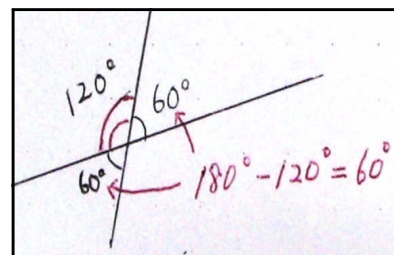


図1 対頂角

生徒Aは「この間の角は直線で 180° だから 60° ひいて 120° 、この直線上でも 180° になるから 120° ひいて 60° 」と説明し、対頂角の角の関係をとらえることができた。

この考え方は、「 60° や 30° において同じ理由で考えられたことにより、すべての角度で同じように考えられるだろう」とする考え方である。また、角度のとらえ方として「 180° の一部の角が 120° であれば、残りの角の大きさは決まる」考え方は、発展的な考え方である。

多角形の内角の和を考える際には、三角形、四角形、五角形の内角の和を考える。三角形の内角の和が 180° になることから四角形を考え、さらに五角形でも考える。図2のように、対角線を引くことで角数が増えると対角線で分けられた三角形が増えることに気づき、 n 角形の内角の和を推理した。

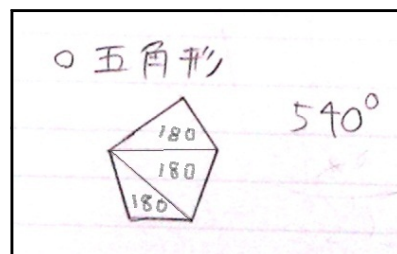


図2 五角形の内角の和

生徒Aは、 n 角形の内角の和を考えるときに、 $180 \times n$ と考えたので、表を使って頂点の数と三角形の数の関係を考えさせることで、 n 角形の内角の和を導くことができた。

この考え方は特徴や法則性を見いだす考え方を高めるもので、多角形の外角の和の授業にも生きていくものである。

(2) 多角形の外角の和を考える授業実践(3, 4/15)

多角形の外角の和を考える際には、三角形、四角形、五角形の外角の和が 360° になる理由を具体的に考えた。一つの頂点で隣合う内角と外角の和は 180° であることと多角形の内角の和の性質から、多角形の外角の和の数量関係を推理した。

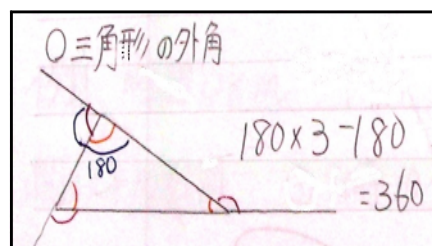


図3 三角形の外角の和

生徒Aは、図3の三角形の数量関係を基に四角形、五角形でも式に表し、戸惑いながらも三つの式の数字の変化から n を当てはめて考えることができた。

この考え方も特徴や法則性を見いだす考え方であるが、それだけでなく、数字の変化から一方が増えるともう一方も増えるという考え方もできていた。

三角形の外角の性質を考える際には、具体的に三角形の外角を求める問題を「内角の和は 180° 」を使って解くこと(図4)から、その性質を予想した。「三角形の外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しい」という予想が成り立つ理由を補助線を引く活動を通して考えた。

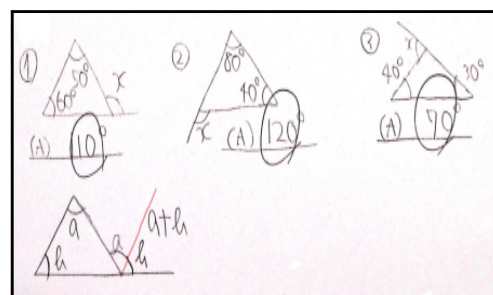


図4 三角形の外角の性質

生徒Aは、すぐに三角形の外角の性質の関係に気付いた。成り立つ理由についても、三角形の内角の和のときの推理の活動から類推して図4の平行線を考えることができた。

この考え方は、似たような条件のもとでは似たような結果が成り立つという考え方の基となるものである。

(3) 星形の図形を考える授業実践（5/15）

星形の図形において、五つの頂点の角の和を考える際には、星形の図形の中から三角形の個数を数える推理の活動をした。

まず、本課題に入る前に、星形の中にある三角形の数を考えさせた。想像だけで考えるのは難しいので、星形がたくさん書いてあるプリント（資料参照）を配布し、見付けた三角形を記入できるようにした。生徒Aを含め、多くの生徒が、図5の「外側の三角形」しか見付けることができなかったのも、図6の「中を通る三角形」を発表させて、もう一度考えさせた。この三角形を見付ける推理の活動を通して、複雑な図形から三角形をとらえさせた。

次に、「中を通る三角形」の二つの角の和と等しい角の場所（図6： $\angle a$ と $\angle d$ ）について確認した。さらに、星形の中にある矢じりの形についても同じように、矢じりの形の数を数え、三つの内角の和と等しい角の位置を確認する活動を行った。このように、星形の中から三角形や矢じりの形を見付ける活動をした後、本時の課題に取り組んだ。推理の活動で学習した三角形と矢じりの形の性質を基にして全員が考え始め、ほとんどの生徒が図7のように三角形の外角を二つ使って考えをまとめることができた。

生徒Aは、はじめは「外側の三角形」を三つしか見付けられなかったが、この活動で「三角形の外角」と「矢じりの形」の性質を使って課題を解くことができた。

この活動を通して、図形を多角的にとらえる力やものの形や位置などをとらえるとき、ねらいに照らして抽象してとらえる力、図形の性質を活用して論理の規則に従って考える力を高めることができた。

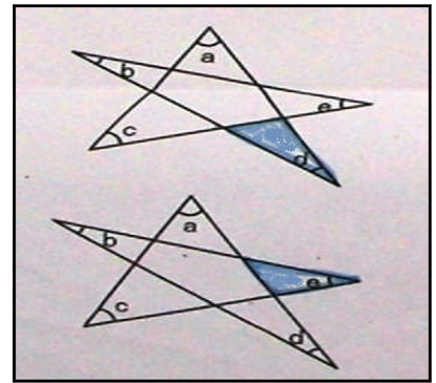


図5 外側の三角形

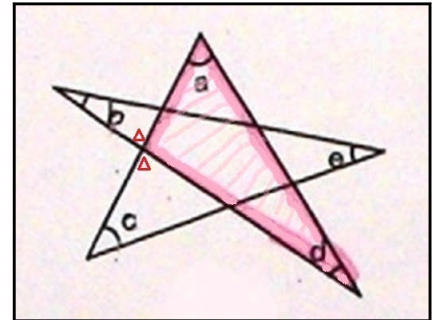


図6 中を通る三角形

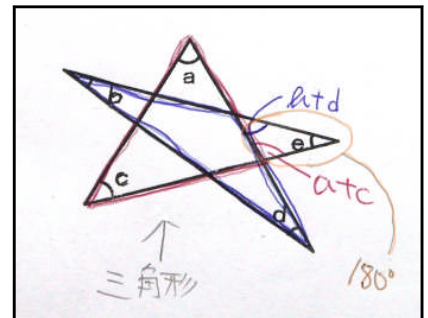


図7 生徒Aの考え

(4) 三角形の合同条件を考える授業実践（7/15）

三角形の合同条件を考える際には、三つの合同条件について具体的に数値にした問題で考えた。問題の数値から、合同な三角形を作図して考える推理の活動をした。

「3辺」が分かっている場合の作図は、全員が合同な図形をかくことができた。この全員が合同の図形をかけたことから、すべての三角形で「3辺」が分かれば、合同な三角形がかけると考え、合同条件の一つを導いた。

「2辺」と一つの角、そして「1辺」と二つの角（図8）は、条件に合う三角形が複数作図できることから、角と辺の三つの要素の位置関係によって作図の方法が決まることに気が付いた。そのうち一通りしか作図できないものが合同条件になることを考え、合同条件が導かれることをとらえた。

生徒Aは、「1辺」の作図のときに図8のように二つの作図ができ、辺の端に角を置く場合にだけ一つの三角形しか作図できないことに気付く、合同条件の理解を深めることができた。

この活動を通して、全員が同じ三角形しか作図できないことから、一般的に成り立つだろうとする考え方を高めることができた。

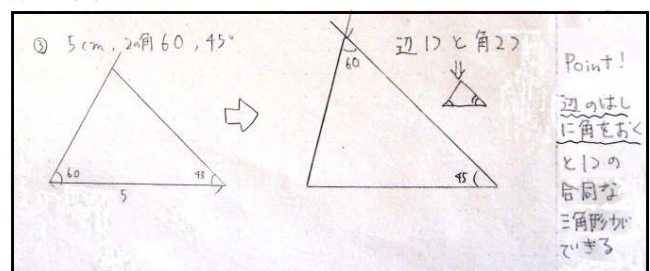


図8 生徒Aの考え

2 追求する過程 8～11時間目の授業実践(仮定から広げる推理の活動)

(1) 仮定と結論を考える授業実践(8/15)

仮定と結論を記号で表すことを考える際には、仮定と結論の言葉の意味と形式的な意味(仮定ならば結論)を理解し、それを基にいろいろな表現の問題文から仮定と結論を読み取る活動をし、さらに記号で表すことを考える活動をした。

生徒Aは、「中点は線分の長さが同じ」(図9)

『ならば』がなくても文章の意味から『ならば』を考える」「垂直は $\angle A = \angle B = 90^\circ$ で表せばいい」と仮定を表現する理由を述べ、問題を把握し、記号で表現する考え方を伸ばすことができた。

この活動を通して、「仮定ならば結論」という形式的な意味を基に、仮定と結論をとらえようとする考え方や、「ならば」がなくても仮定と結論の意味と「ならば」を予想してとらえようとする考え方を高めることができた。

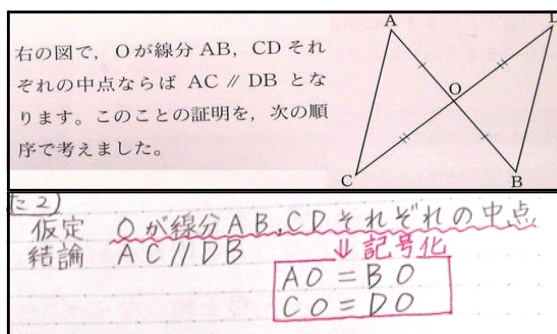


図9 課題と生徒Aの考え

(2) 三角形の合同条件、三角形の証明を考える授業実践(9, 10/15)

三角形の合同条件の活用を考える際には、課題から仮定を記号化して表すことで、三角形の合同条件の二つの要素をとらえ、残りの一つの要素を図形の性質から考える推理の活動をした。

生徒Aは、課題の図から「対頂角だ」とか「共通する辺だ」とか分かりやすい図形の性質に気付いたり、仮定から記号に表した二つの合同条件の要素から「2組の辺だ」と合同条件を予想したりしてもう一つの要素の根拠を考えることができた。

この考え方は、見通しをもって筋道を組み立てる基となる考え方である。

証明の意味と記述のポイントを考える際には、課題から仮定を記号化することで合同条件に必要な三つの要素を考える。仮定を認識し、合同条件の不足分の要素を考え、必要な要素を課題から推理する。

生徒Aは、プリントの証明の書き方(資料編P16参照)を基に、仮定を書くところまで機械的に考え、その後合同条件に必要な要素を考えることができた。

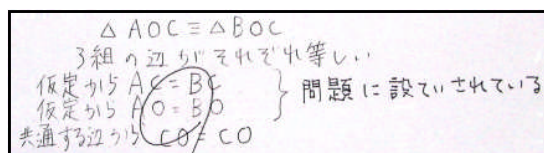


図10 生徒Aの考え

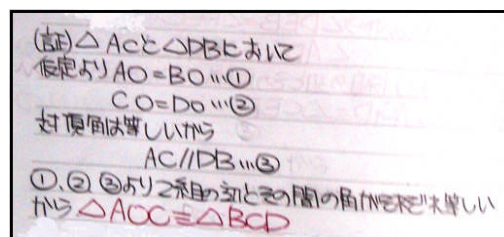


図11 生徒の証明

この考え方は、課題から仮定を記号で表すことが定着した後、三角形の合同について証明の書き方の型を示したことが効果的であった。これにより、証明の仮定を書くところまでは意識しなくてもできるようになったので、証明の書き方に合わせて、筋道を正しく組み立てていく考え方が高まった。

(3) 三角形の合同の証明を考える授業実践(11/15)

三角形の合同の証明について問題演習を行う際には、仮定に合同条件の要素が少ない場合に、仮定から図形の性質を使って考え、合同条件を絞り込み、合同条件の要素を推理する。

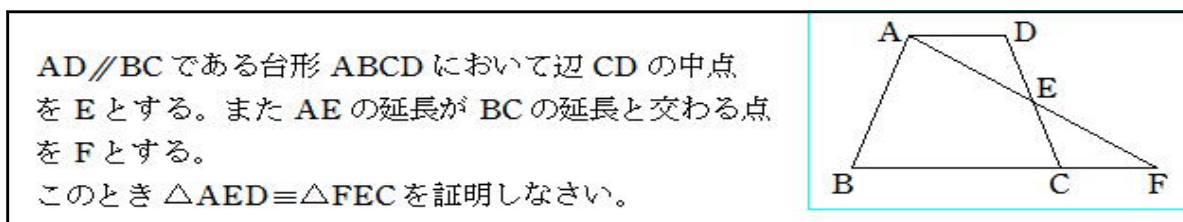


図12 本時の課題

まず、結論を考えることにした。結論は、記号化されており、すぐに「 $\triangle ADE \equiv \triangle EFC$ 」を

答えることができた。次に、仮定を考えた。全体へ問い掛けると、「 $AD \parallel BC$ 」「台形 $ABCD$ 」「 $DE = CE$ 」の答えがすぐに返ってきた。台形の定義から平行と同じなので、仮定を二つに絞って全体へ示した（図13の仮定と結論）。

二つの仮定を確認した後、証明の見通しについて尋ねると「仮定の辺は合同条件の要素になる」「 $AD \parallel CD$ は、そのままじゃ使えない」と答えが返ってきた。そこで、 $AD \parallel CD$ から合同条件の要素を尋ねると「 $\angle ADE = \angle FCE$ 」を答えたので、合同条件を予想させると「1組の辺」と答え、三角形の合同の証明に見通しをもつことができた。

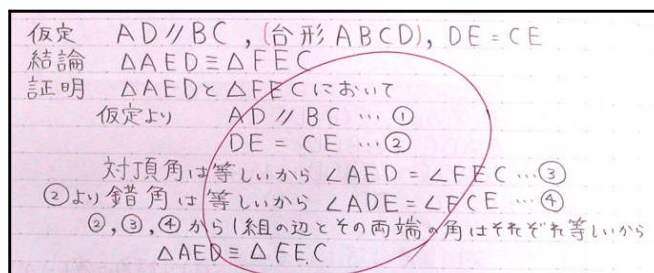


図13 生徒Aの証明

生徒Aは、「仮定から図形の性質を使えばいいんだ」「辺は仮定の一つしかないんだ」と仮定から課題に表現されていない三角形の合同条件の要素を見付けることができた。

この活動を通して、「AならばB、BならばC」といった論理の規則に従って思考を展開する考え方を高めることができた。

3 深める過程 12～15時間目の授業実践(結論から広げる推理の活動)

(1) 三角形の合同を使った証明を考える授業実践(12, 13/15)

三角形の合同を使った証明の課題を行う際には、結論が三角形の合同でない場合に、結論から逆に必要な根拠を推理させる活動をした。

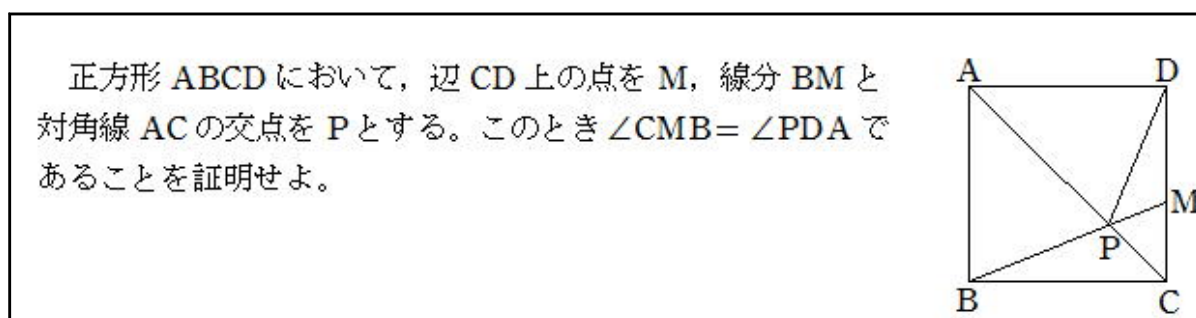


図14 本時の課題

まず、図14の課題から仮定と結論を問い掛けると、仮定は「正方形 $ABCD$ 」、結論は「 $\angle CMB = \angle PDA$ 」と答えが返ってきた。そして、既習の証明内容との違いを推理し、三角形の合同の証明になっていないことに気付いた。証明を考えさせると、全員が考え込んでしまった。

そこで、「仮定から考えてもだめなら、結論から逆に考えてみようか」と投げ掛け、図15のように結論を図示して考えさせた。「○印のある三角形($\triangle ADP$)と△印のある三角形($\triangle CMP$)は合同にならないよね」と問い掛けた後、合同になる三角形を推理させた。すると、生徒は、「 $\triangle ADP$ と $\triangle ABP$ が合同になりそう」と図16の合同な組合せを見付けることができた。 $\triangle ADP$ と $\triangle ABP$ の合同の証明を考えた。この合同を証明するための合同条件について話し合った後、合同条件「2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい」を活用して証明することになった。

そして、結論である $\angle CMB = \angle PDA$ の証明を考えることにした。 $\triangle ADP$ と $\triangle ABP$ の合同から対応する角は等しいので、図16の○と□印のように $\angle ADP = \angle ABP$ を図示し、結論を推理させた。すると、数人の生徒が「錯角だ」とつぶやき、この意見から正方形の平行な対辺であ

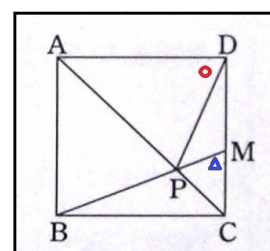


図15 結論の図示

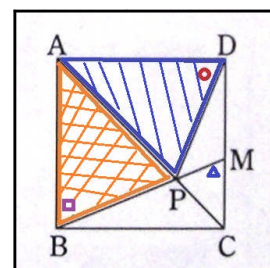


図16 合同な三角形

る $AB \parallel DC$ に気付き、錯角が等しいことから結論への見通しをもって考えることができた。

このように、合同な三角形が明示されていない課題において、結論の角から証明の筋道を考える活動の後、図17の証明を書くことができた。

生徒Aは、はじめはまるで証明の筋道が分からないようであったが、結論から考えていく一つ一つの過程で「そうか」という納得の思いをもち、それらが結論まで結びついたときには、「やった」という驚きと喜びを

もったことがうかがえた。そして、推理の活動の後、証明を書き上げることができた。

この考え方は、前時の「AならばB、BならばC」といった論理の規則に従って思考を展開する考え方の発展である。この活動を通して、それまで学習した仮定からA、B、Cの思考を、結論からのC、B、Aに思考の方向を変える考え方を高めることができた。

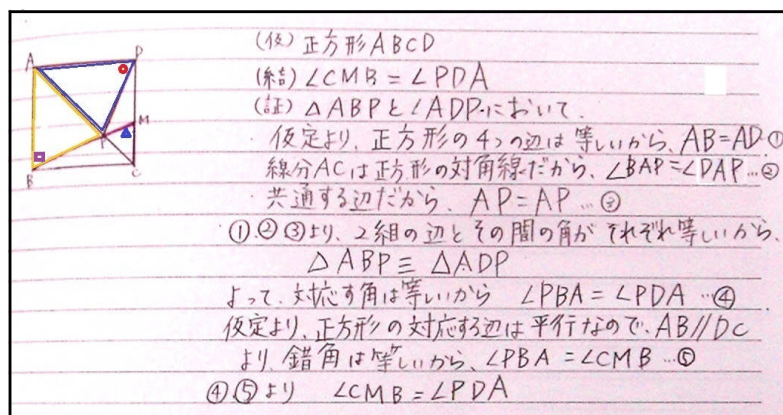


図17 生徒の証明

VII 研究のまとめ

1 成果

- 具体的に考える推理の活動を取り入れることにより、特徴や法則性を見いだす考え方や一方が増加すると他方も増加する考え方、ものの形や位置などをとらえるとき、ねらいに照らして抽象してとらえる考え方を活用していることが分かった。
- 仮定から広げる推理の活動を取り入れることにより、多様な課題から仮定と結論を記号化することで、似たような条件のもとでは似たような結果が成り立つという考え方を活用していることが分かった。また、記号化した仮定と結論を示した図から合同条件の構成要素をとらえ、論理の規則に従って証明を組み立てていこうとする考え方を活用していることが分かった。その結果として、見通しをもって筋道を組み立てる考え方や証明の書き方に合わせて、筋道を正しく組み立てていく考え方を高めることができた。
- 結論から広げる推理の活動を取り入れることにより、それまでの仮定からA、B、Cの思考を、結論からのC、B、Aに思考の方向を変える考え方を活用していることが分かった。その結果として、論理の規則に従って証明を組み立てていこうとする考え方が高まり、見通しをもって考える態度を養うことができた。
- 演繹的な考え方を高めるためには、特徴や法則性を見いだす考え方や記号化したり、図に視覚化したりする考え方、似たような条件のもとでは似たような結果が成り立つという考え方などの数学的な考え方をはたらかせるようにすることが必要であると分かった。

2 課題

- 演繹的な考え方を高めるために、特徴や法則性を見いだす考え方や記号化したり、図に視覚化したりする考え方などの指導の重点の置き方や、関連のさせ方を実践を通して明らかにする。

<参考文献>

- ・ 柴垣 和三 訳 『帰納と類比』 丸善株式会社 (1959)
- ・ 山下 正男 著 『論理的に考えること』 岩波ジュニア新書 (1985)