数学的思考力を高めるための授業の工夫
～意味理解を深めるための数学的活動を通して～

算数・数学班　　山越　康生（高等学校教諭）

～「数Ⅲ　積分」の授業実践より～

【実践１】f(ax+b)の不定積分

公式が覚えられずに計算ができない

↓

不定積分を複数比較して共通点を見いだし、**一般化する活動**

【実践２】定積分と区分求積法

数列の和を定積分に変換する方法が分からない

↓

定積分で表された面積を区分求積法で求め、**体験する活動**

【実践３】　回転体の体積

どのように式をたてたらよいか分からない

↓

回転体を輪切りにして断面図を**イメージする活動**

研究の成果

・**抽象化**されているものを**具体化**することで理解が深まった。

・**結論**から**逆に考える**ことは、思考の経路が分かり、意味理解をする上で有用な手だてであったといえる。

【考察・処理する過程】

【実践１】f(ax+b)の不定積分

①　微分と積分を比較して原始関数を求める

$(3x-1)^4$の原始関数は？

x^4の原始関数は$\frac{1}{5}x^5$だったね。

$\frac{1}{5}(3x-1)^5$かな？

$\frac{1}{5}(3x-1)^5$を微分すると$3(3x-1)^4$
さらに３で割ってみよう。

$\frac{1}{15}(3x-1)^5$＋Ｃが原始関数となる。

②　法則性を見いだし、一般化する

（１）$\int(3x+1)^4dx=\frac{1}{15}(3x+1)^5+C$

分母の１５は３と５の積なっているぞ。
xの係数と（　）の指数の積が分母になるんだ！！

（２）$\int(4x-3)^2dx=\frac{1}{12}(4x+3)^3+C$

（３）$\int(-2x+5)^3dx=-\frac{1}{8}(-2x+5)^4+C$

⇩

$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$

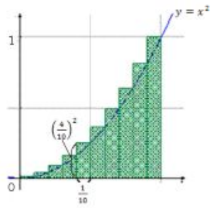
最終的に

$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$　とまとめることができた。

【数学的性質や一般性を発見する過程】

【実践２】定積分と区分求積法

①区分求積法を体験する（10 分割→ｎ分割）



ｋ番目の長方形は
横の長さは$\frac{1}{10}$、縦の長さ$\left(\frac{k}{10}\right)^2$だから
面積は$\left(\frac{k}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$だね。

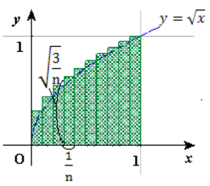
$$S=\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{4}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\cdots+\left(\frac{10}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}\right\}=\frac{385}{1000}$$

ｎ分割して、ｎを無限大にすると、面積は

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{3}$となる。

②定積分→数列の和の変換

（区分求積法と定積分の関係を学ぶ）



$\int_0^1\sqrt{x}\,dx$を数列の和を用いて表す。

$$\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{3}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right\}$$

$\frac{1}{n}$が長方形の横の長さで、$\sqrt{\frac{1}{n}}$、$\sqrt{\frac{2}{n}}$、…、$\sqrt{\frac{n}{n}}$　が
それぞれの長方形の縦の長さだね。

③数列の和→定積分への変換

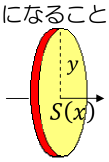
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right\}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{2}$$

【応用問題へと発展する過程】

【実践３】　回転体の体積

①　体積の求め方を考える

リンゴを切って断面が円になることを実感する。



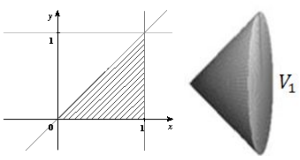
断面が円になっているね。この断面を積分すれば体積を求められるね。

体積　$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$　断面積　$S(x)=\pi y^2$

②　簡単な回転体の体積を求める

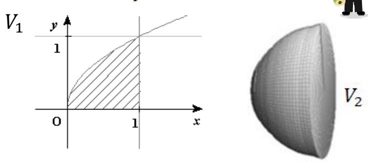
リンゴと同じで、輪切りにして断面積を考えてみよう。

（１）　$y=x$



$V_1=\pi\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\pi$

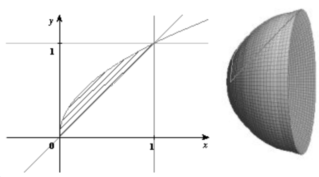
（２）　$y=\sqrt{x}$



$V_2=\pi\int_0^1\sqrt{x}^2dx=\frac{1}{2}\pi$

③　複雑な回転体の体積を求める

（３）　$y=x$　、　$y=\sqrt{x}$



Ｖ１とＶ２の立体の体積の差を考えればいいんだね。（１）と（２）を使って、自分で解けたぞ。

$V_2-V_1=\frac{1}{6}\pi$