数学的性質を生徒自ら見いだす指導の工夫

―〈活動→表現→活用〉の3ステップの数学的活動を通して ―

算数・数学班　安田　聡（高等学校教諭）

～「数学B　ベクトル」の授業実践より～

なんでこんな式になるんだろう？

式の意味が分からないなぁ。

どうやって式を利用するんだろう？

こんな疑問を解決する手だてとして・・・

活　動　既習内容を用いて取り組める問題を組み込み、数学的性質や一般性の獲得の手だてとなる演算や立式を中心とした数学的処理を行う。
（ねらい：数学への意欲を高める）

表　現　活動のステップで取り上げた問題を解いた過程や答えから、数学的記号を用いて生徒自ら数学的性質や一般性（公式）を獲得し、数学的に表現する。
（ねらい：数学的表現の意味理解を深める）

活　用　表現のステップで獲得した性質や一般性を用いて解決できる問題を意図的かつ計画的に取り上げ、解決することで、有用性を確認する。
（ねらい：達成感を味わう）

《研究の成果》

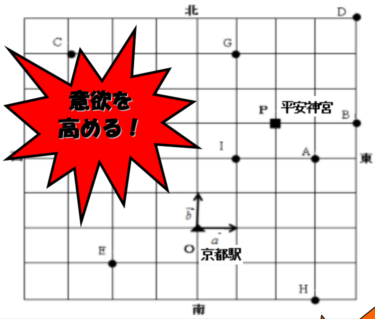
生徒自ら取り組める３ステップの活動を取り入れたことで、既習内容と単元で活用する数学的表現を関連付けることができ、生徒たちは、数学的性質への理解の実感を持ちながら活動に取り組むことができた。そして、その数学的性質を活用することで、応用問題も解決できる有用性が確認でき、達成感を味わうことができた。

【考察・処理する過程】

＜実践１：ベクトルの分解（一意性）＞

活　動　日常生活に関係付ける。

「京都駅から平安神宮まで観光しながら行ってみよう！」



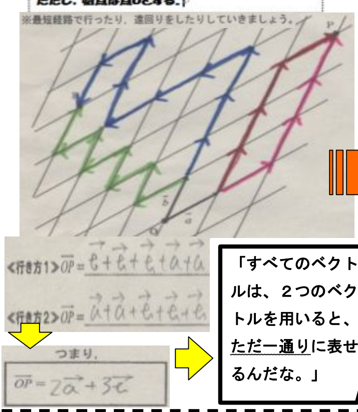
［注意］ O：京都駅，A：八坂神社，B：清水寺，C：金閣寺
D：銀閣寺，E：東寺，F：二条城，G：京都大学，
H：稲荷伏見大社，I：東本願寺，P：平安神宮

例『京都駅』→$\vec{b}$→$\vec{a}$→$\vec{b}$→「I：東本願寺」→$\vec{b}$→$\vec{a}$→「平安神宮」

《行き方1》
『京都駅』→＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿→『平安神宮』

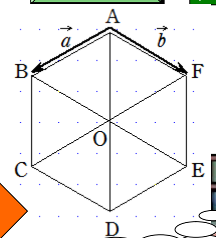
表　現　法則性を見つける。

下図の座標上にある2点P，Rを$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。
ただし，始点は点Oとする。



「すべてのベクトルは、２つのベクトルを用いると、ただ一通りに表せるんだな。」

活　用　難易度の高い問題に触れる。



左図において、$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{QP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

遠回りをしても必ず同じ表し方なんだ。

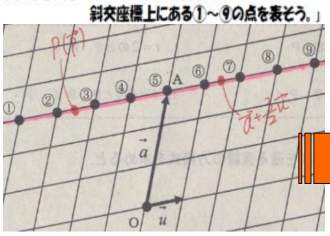
問題にないベクトルも、いろいろな行き方を考えてみよう！

【数学的性質や一般性を発見する過程】

＜実践２：直線のベクトル方程式と媒介変数表示＞

活　動　既習内容を用いて求める。

「点Oを始点とするベクトル$\vec{a}$，$\vec{u}$を用いて、斜交座標上にある①～⑨の点を表そう。」



①：$\vec{a}-4\vec{u}$，②：$\vec{a}-3\vec{u}$，③：$\vec{a}-2\vec{u}$，・・・
・・・⑦：$\vec{a}+2\vec{u}$，⑧：$\vec{a}+3\vec{u}$，⑨：$\vec{a}+4\vec{u}$になる。

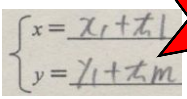
①から⑨はすべて同じ直線上にあるぞ。

$\vec{u}$の係数だけが変化しているなぁ。

表　現　図形的な意味を考える。

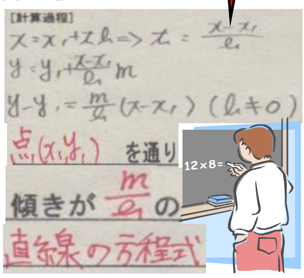
直線上の点P（$\vec{p}$）を一般化すると、

$\vec{p}$，$\vec{a}$，$\vec{u}$を具体的な成分にして、図の表す式を立てると、



数学的表現の意味理解を深める！

更にtを消去すると、



「今までに学習した内容と結び付いた。」

活　用　関係を問題に当てはめる。

1　次の点Aを通り、$\vec{u}$が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を、媒介変数をtとして求め、tを消去した直線の方程式を求めよ。

例　A(3，5)，$\vec{u}=(2，3)$

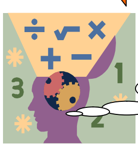
解答　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$より，
$(x，y)=(3，5)+t(2，3)$から

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=5+3t \end{cases}$$

tを消去して　$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}$

$3(x-3)=2(y-5)$

よって　$y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$



$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$が$y=mx+n$になるなんて、すごい！

【応用問題へと発展する過程】

＜実践３：条件を満たすベクトルの終点の存在範囲＞

活　動　新しい条件を考える。

２点を通る直線のベクトル方程式の公式に、下にある具体的な s，t を代入し、図示させる。

① $s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$のとき．

② $s=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{1}{4}$のとき．

まとめると，（s，tの値に注目して）

点Pが　線分AB上　にある

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$
$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

線分ＡＢ上にあるのはs≧0，t≧0 のときなんだ。

表　現　条件に合わせて図示をする。

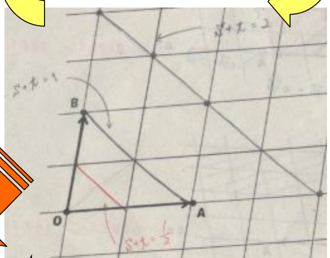
Ex1　△OABに対し、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s$，$t$は実数）とする。$s$，$t$が次の条件を満たしながら動くとき、点Pの存在範囲を左の斜交座標上に図示せよ。

(1)　$s+t=2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

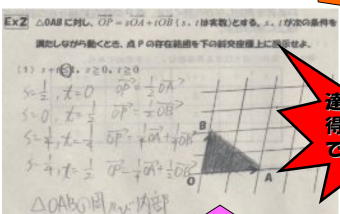
考え方：条件に当てはまる具体的なs，tを求めてみる。

s	t	$s+t$	s	t	$s+t$
0	2	2	[illegible]	[illegible]	2
1	1	2	[illegible]	[illegible]	2
2	0	2	[illegible]	[illegible]	2

“具体的数値と図形との関係を考察する手立て“



活　用　数値や条件を変える。



達成感を得ることができる！

「自分の考えを元に問題解決できたぞ。」